

Übungsblatt 2

Aufgabe 4 (Cauchy-Folgen und Konvergenz):

Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über \mathbb{K} und $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien Cauchy-Folgen darin. Zeige, dass Folgendes gilt:

- (a) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.
- (b) $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ hat höchstens einen Grenzwert.
- (c) Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ ist $(\alpha x_n + \beta y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ wieder eine Cauchy-Folge. Existieren außerdem zwei der folgenden Grenzwerte, so auch der dritte und es gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \right) + \beta \left(\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \right).$$

Aufgabe 5 (Abgeschlossene Teilmengen und Unterräume):

Es sei $(X, \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum.

- (a) Zeige, dass $A \subset X$ genau dann abgeschlossen ist, wenn alle Cauchy-Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, für die $a_n \in A$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, einen Grenzwert in A besitzen.
- (b) Es sei $V \subset X$ ein linearer Unterraum von X . Zeige, dass V genau dann abgeschlossen ist, wenn $(V; \|\cdot\|)$ ein Banach-Raum ist.

Aufgabe 6 (Funktionsfolgen):

Wir betrachten den Vektorraum

$$BC^0([0, \infty)) = \{ f \in C([0, \infty)) \mid f \text{ beschränkt} \}$$

sowie die drei Normen

$$\|f\|_1 := \int_0^\infty \frac{|f(t)|}{1+t^2} dt, \quad \|f\|_2 := \left(\int_0^\infty \frac{|f(t)|^2}{1+t^2} dt \right)^{1/2}, \quad \|f\|_3 := \sup\{|f(t)| \mid t \geq 0\}.$$

Desweiteren seien die folgenden Funktionenfolgen gegeben, die von den reellen Parametern $\alpha, \beta, \gamma \geq 0$ abhängen:

$$f_n(t) = n^\alpha \arctan(t-n), \quad g_n(t) = n^\alpha t^\beta e^{-nt}, \quad h_n(t) = \frac{n^\alpha t^\beta}{1 + |n-t|^{\beta+\gamma}}.$$

Untersuche bezüglich welcher der Normen diese Folgen beschränkt oder Cauchy-Folgen sind und bestimme, falls vorhanden, den Grenzwert.

bitte wenden

Aufgabe 7 (Hölder-Räume):

Es sei $G \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet. Für $\alpha \in (0, 1]$ definieren wir die Hölder-Räume

$$C^\alpha(G) := \{ f \in C(G) \mid f \text{ beschränkt, } h_\alpha(f) < \infty \}$$
$$\text{mit } h_\alpha(f) = \sup \left\{ \frac{|f(s) - f(t)|}{|s - t|^\alpha} \mid s, t \in G, s \neq t \right\}$$

und die Hölder-Normen $\|f\|_\alpha := \|f\|_\infty + h_\alpha(f)$.

(a) Zeige, dass $(C^\alpha(G), \|\cdot\|_\alpha)$ ein reeller normierter Vektorraum ist.

(b) Es sei $G = [0, 1] \subset \mathbb{R}$. Konstruiere für beliebiges $\alpha \in (0, 1]$ eine Funktion $g_\alpha \in C^\alpha(G)$, die für jedes $\beta > \alpha$ nicht in $C^\beta(G)$ liegt. Konstruiere außerdem eine Funktion $g_* \in C^0(G)$, die in keinem $C^\alpha(G)$ für $\alpha > 0$ liegt.

(c) Zeige, dass für $0 < \alpha < \beta \leq 1$ die Norm $\|\cdot\|_\beta$ echt stärker als die Norm $\|\cdot\|_\alpha$ ist.

(d) Zeige, dass $(C^\alpha(G), \|\cdot\|_\alpha)$ sogar ein Banach-Raum ist.