



## Übungsblatt 1

### Aufgabe 1 (Normen im $\mathbb{R}^n$ ):

- (a) Bestimme alle Normen auf dem reellen Vektorraum  $\mathbb{R}$ .
- (b) Sei  $\|\cdot\|$  eine beliebige Norm auf  $\mathbb{R}^n$ . Zeige, dass die zugehörige Einheitskugel  $B = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$  dieser Norm eine symmetrische, konvexe Menge ist, d.h.  
(1)  $x \in B \Rightarrow -x \in B$  und (2)  $x, y \in B, \theta \in [0, 1] \Rightarrow \theta x + (1-\theta)y \in B$ .
- (c) Es sei nun  $A \subset \mathbb{R}^n$  eine symmetrische, konvexe Teilmenge, die außerdem kompakt sei und 0 als inneren Punkt enthalte. Zeige, dass die Funktion  $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$N(x) := \inf \left\{ \alpha \in (0, \infty) \mid \frac{1}{\alpha} x \in A \right\}$$

eine Norm auf  $\mathbb{R}^n$  definiert.

### Aufgabe 2:

Sind auf dem Vektorraum  $X$  zwei Normen  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_2$  gegeben, so heißt  $\|\cdot\|_2$  *stärker* als  $\|\cdot\|_1$  falls es ein  $C > 0$  gibt, so dass  $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$  für alle  $x \in X$  gilt. Die Normen heißen *äquivalent*, falls  $\|\cdot\|_1$  stärker als  $\|\cdot\|_2$  ist und gleichzeitig  $\|\cdot\|_2$  stärker als  $\|\cdot\|_1$  ist.

- (a) Betrachte auf  $C_c(\mathbb{R}) \stackrel{\text{def}}{=} \{f \in C(\mathbb{R}) \mid \exists R > 0: |t| \geq R \Rightarrow f(t) = 0\}$  die beiden Normen

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)| dt \quad \text{und} \quad \|f\|_{\infty} = \sup\{|f(t)| \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Zeige, dass keine der Normen stärker als die andere ist. (Konstruiere dazu geeignete Folgen  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , die das jeweilige "Stärkersein" zum Widerspruch führen.)

- (b) Sei nun  $-\infty < a < b < \infty$  und  $X = C([a, b])$ . Weiter seien  $\|\cdot\|_1$  und  $\|\cdot\|_{\infty}$  wie in (a) gegeben, wobei  $\mathbb{R}$  durch  $[a, b]$  ersetzt ist. Zeige, dass  $\|\cdot\|_{\infty}$  stärker als  $\|\cdot\|_1$  ist und dass die Normen nicht äquivalent sind.

### Aufgabe 3 (Faktorisierung):

Es sei  $(X, \mathbb{K}, N)$  ein halbnormierter Vektorraum. Zeige:

- (a)  $V = \{x \in X \mid N(x) = 0\}$  ist ein linearer Unterraum.
- (b)  $x \sim y \Leftrightarrow N(x-y) = 0$  definiert eine Äquivalenzrelation.
- (c)  $\|[x]_{\sim}\|_{\sim} \stackrel{\text{def}}{=} N(x)$  ist wohldefiniert (Repräsentantenunabhängigkeit).
- (d)  $(X_{/\sim}, \mathbb{K}, \|\cdot\|_{\sim})$  ist ein normierter Vektorraum.