



Korrektur zu den Vorlesungen vom 30.1. und 3.2.2006

Definition: In einem topologischen Raum (X, \mathcal{T}) heißt eine Teilmenge (*überdeckungs-*) *kompakt*, falls jede Überdeckung aus offenen Mengen eine endliche Überdeckung enthält. Die Teilmenge heißt *folgenkompakt*, falls jede Folge in A eine konvergente Teilfolge besitzt.

Der Satz von Banach–Alaoglu–Bourbaki

Version I von Banach (1932)¹:

Für jeden separablen Banach–Raum X ist die abgeschlossene Einheitskugel des Dualraums X' , d.h., $B' = \{x' \in X' \mid \|x'\|_{X'} \leq 1\}$, schwach*–folgenkompakt.

Version II von Bourbaki (1938)² und Alaoglu (1940)³:

Für jeden Banach–Raum X ist die abgeschlossene Einheitskugel B' in der schwach*–Topologie überdeckungskompakt.

Die Dualräume von nichtseparablen Banach–Räumen sind Beispiele von topologischen Vektorräumen, in denen Überdeckungskompaktheit und Folgenkompaktheit verschieden sind. Folgendes Beispiel ist *H.–W. Alt: Lineare Funktionalanalysis, Kap. 5* entnommen.

Beispiel: Auf dem nicht–separablen Banach–Raum $X = L^\infty((0, 1))$ definieren wir durch

$$F_k(g) = k \int_0^{1/k} g(t) dt \quad \text{für } g \in L^\infty((0, 1))$$

eine Folge $(F_k)_{k \in \mathbb{N}}$ in $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$ mit $\|F_k\|_{X'} = 1$.

Wir zeigen nun, dass KEINE Teilfolge davon schwach konvergiert. Sei also $(F_{k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Teilfolge. Wir konstruieren für diese Teilfolge ein $g \in L^\infty((0, 1))$, so dass $F_{k_l}(g)$ für $l \rightarrow \infty$ nicht konvergiert. Dazu wähle aus $(k_l)_{l \in \mathbb{N}}$ eine weitere Teilfolge $(k_{l_j})_{j \in \mathbb{N}}$ aus, so dass $k_{l_{j+1}} \geq 3k_{l_j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt. Setze nun

$$g(t) = \sum_{m \in \mathbb{N}} \chi_{[a_m, b_m]}(t) \quad \text{mit } a_m = 1/k_{l_{2m}} \quad \text{und } b_m = 1/k_{l_{2m-1}}.$$

(Hierbei gilt $\chi_A(t) = 1$ für $t \in A$ und 0 sonst.) Beachte, dass per Konstruktion

$$b_1 \geq 3a_1 > a_1 \geq 3b_2 > \dots \geq 3b_m > b_m \geq 3a_m > a_m \geq 3b_{m+1} \rightarrow 0.$$

Für dieses spezielle g , das nur die Werte 0 und 1 annimmt, folgt nun einerseits

$$F_{k_{l_{2m-1}}}(g) = \frac{1}{b_m} \left(b_m - a_m + \int_0^{b_m} g(t) dt \right) \geq \frac{1}{b_m} \left(b_m - \frac{b_m}{3} + 0 \right) = \frac{2}{3}$$

und andererseits

$$F_{k_{l_{2m}}}(g) = k_{l_{2m}} \int_0^{k_{l_{2m}}} g(t) dt = \frac{1}{a_m} \int_0^{b_m} g(t) dt \leq \frac{a_m}{b_{m+1}} \leq \frac{1}{3}.$$

Dies zeigt, dass $(F_{k_l}(g))_{l \in \mathbb{N}}$ nicht konvergiert.

¹STEFAN BANACH: *Théorie des Opérations Linéaires*. M.Garasiński, Warszawa, 1932.

²NICOLAS BOURBAKI: Sur les espaces de Banach. *Comptes Rend. Acad. Sci. Paris* **206** (1938) 1701–1704.

³LEONIDAS ALAOGU: Weak topologies of normed linear spaces. *Annals of Mathematics* **41** (1940) 252–267.