

## Übungsblatt 16

### Aufgabe 50 (Das Weierstraß-Prinzip):

Es sei  $X = \ell_2$  der BANACH-Raum der quadratintegrierbaren Folgen und

$$I(\mathbf{a}) = \left(1 - \|\mathbf{a}\|_2^2\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} a_n^2 \quad \text{für } \mathbf{a} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}.$$

- (a) Ist das Funktional  $I$  normstetig?
- (b) Zeige, dass für  $\mathbf{a} \in \ell_2$  stets  $I(\mathbf{a}) > 0$  gilt (ohne Gleichheit), und finde eine Folge  $\mathbf{a}^{(k)}$  mit  $I(\mathbf{a}^{(k)}) \rightarrow 0$ . (Versuche möglichst beide Beiträge klein zu machen.)
- (c) Zeige, dass jede Folge  $(\mathbf{b}^{(k)})_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $I(\mathbf{b}^{(k)}) \rightarrow 0$  in der schwachen Topologie von  $\ell_2$  gegen 0 strebt.

### Aufgabe 51 (Störungsrechnung für Resolventen):

Es sei  $X$  ein BANACH-Raum und  $A \in \mathcal{L}(X, X)$  und  $\rho(A)$  die Resolventemenge von  $A$ .

- (a) Für  $\lambda \in \rho(A)$  sei  $R_\lambda = \|(A - \lambda I)^{-1}\|_{X \rightarrow X}$ . Zeige, dass  $\{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu - \lambda| < 1/R_\lambda\}$  in  $\rho(A)$  enthalten ist. Betrachte dazu  $f = (A - \mu I)x = (A - \lambda I)x + (\lambda - \mu)x$  und wende die Neumannsche Reihe an.
- (b) Es seien  $A, \lambda$  und  $R_\lambda$  wie in (a). Weiter sei  $B \in \mathcal{L}(X, X)$  mit  $\varepsilon = \|A - B\|_{X \rightarrow X} < 1/R_\lambda$ . Zeige, dass  $\{\mu \in \mathbb{C} \mid |\mu - \lambda| < 1/R_\lambda - \varepsilon\} \subset \rho(B)$ .
- (c) Für die Folge  $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  gelte  $\|A - B_n\|_{X \rightarrow X} \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$ . Zeige, dass die Spektren  $\sigma(B_n)$  im Hausdorffschen Sinne gegen  $\sigma(A)$  konvergieren, d.h.,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n \geq n_0 : \quad \sigma(A) \subset \mathcal{U}_\varepsilon(\sigma(B_n)) \text{ und } \sigma(B_n) \subset \mathcal{U}_\varepsilon(\sigma(A)),$$

wobei  $\mathcal{U}_\varepsilon(M) = \cup_{\mu \in M} B_\varepsilon(\mu)$  die  $\varepsilon$ -Umgebung von  $M$  ist.

### Aufgabe 52 (Unendliche Matrizen):

Auf dem Folgenraum  $\ell_2$  betrachten wir die Verschiebungsoperatoren

$$R\mathbf{a} = (0, a_1, a_2, a_3, \dots) \quad \text{und} \quad L\mathbf{a} = (a_2, a_3, a_4, \dots).$$

- (a) Bestimme für  $X = \ell_2$  zu  $R$  und  $L$  die Norm, den Kern und den Wertebereich.
- (b) Zeige, dass  $L : \ell_2 \rightarrow \ell_2$  jedes  $\lambda$  mit  $|\lambda| < 1$  als Eigenwert hat. Bestimme  $\sigma_{\ell_2}(L)$ .
- (c) Besitzt  $R$  auch Eigenwerte? Bestimme  $\sigma_{\ell_2}(R)$  durch betrachten der Resolventengleichung  $(R - \lambda I)\mathbf{a} = \mathbf{b}$  für ein einfaches  $\mathbf{b}$ .
- (d) In welchem Sinne kann  $R$  als adjungierte Abbildung von  $L$  gedeutet werden?