Übungsblatt 15

Aufgabe 47 (Schwache Konvergenz):

Es sei X ein BANACH–Raum mit Dualraum X'. Weiter seien Folgen $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in X und $(x'_j)_{j\in\mathbb{N}}$ in X' gegeben.

(a) Aus $y_k \rightharpoonup y$ in X und $x'_j \to x'$ in X' (stark) folgt $x'_k(y_k) \to x'(y)$ in $\mathbb{K}$.

(b) Aus $y_k \to y$ in X (stark) und $x'_j \overset{*}{\rightharpoonup} x'$ in X' folgt $x'_k(y_k) \to x'(y)$ in $\mathbb{K}$.

(c) Konstruiere ein Beispiel mit $y_k \rightharpoonup y$ und $x'_j \overset{*}{\rightharpoonup} x'$, so dass $x'_k(y_k)$ nicht konvergiert.

Aufgabe 48 (Schwache versus starke Konvergenz):

(a) Es sei H ein HILBERT–Raum. Zeige folgende Implikation:

$$\Big(y_k \rightharpoonup y \ \text{ und } \ \|y_k\| \to \|y\| \Big) \qquad \Longrightarrow \qquad y_k \to y.$$

(b) Es sei $X = \mathrm{L}^1((0,\pi))$, $f_* \equiv 1$ und $f_k(t) = 1+\sin(kt)$. Welche der folgenden drei Konvergenzaussagen ist richtig?

$$\text{(i) } \|f_k\|_1 \to \|f_*\|_1 \qquad \text{(ii) } f_k \to f_* \text{ in } X \qquad \text{(iii) } f_k \rightharpoonup f_* \text{ in } X.$$

Für (ii) zeige $\|f_k - f_{km}\|_1 = \|f_1 - f_m\|$. Für (iii) verwende $X' = \mathrm{L}^\infty((0,\pi)) \subset \mathrm{L}^2((0,\pi))$.

Aufgabe 49 (Konvexe Mengen, ein Trennungs– und ein Existenzsatz):

Es sei X zunächst ein allgemeiner reeller BANACH–Raum.

(a) Es seien A und K disjunkte, konvexe Teilmengen von X, wobei A abgeschlossen und K kompakt ist. Zeige, dass die Mengen durch eine Hyperebene getrennt werden können, d.h.

$$\exists\, x' \in X' \ \exists\, \alpha \in \mathbb{R} \ \forall\, a \in A \ \forall\, y \in K : \ x'(a) \le \alpha < x'(y).$$

Zeige dazu, dass für hinreichend kleine $\varepsilon > 0$ auch $A_\varepsilon = \{\, y \in X \mid \exists\, a \in A : \ \|a-y\| < \varepsilon \,\}$ zu K disjunkt ist.

(b) Es sei wiederum A eine abgeschlossene, konvexe Teilmenge von X. Zeige, dass A schwach folgenabgeschlossen ist, d.h. aus $a_k \rightharpoonup a_*$ mit $a_k \in A$ folgt $a_* \in A$.

(c) Es sei nun X ein reeller, reflexiver BANACH–Raum und $A \subset X$ abgeschlossen und konvex. Zeige, dass zu jedem ein $x \in X$ ein $a \in A$ existiert mit

$$\|a - x\| = \inf\{\, \|\widetilde{a} - x\| \mid \widetilde{a} \in A \,\}.$$