Übungsblatt 13

Aufgabe 44 (Dualräume von c_0 und ℓ_1):

Es seien c_0, ℓ_1 und ℓ_∞ die bekannten Folgenräume mit den üblichen Normen $\|(a_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{N}}\|_1 = \sum_{\mathbb{N}} |a_\gamma|$ und $\|(a_\gamma)_{\gamma\in\mathbb{N}}\|_\infty = \sup_{\mathbb{N}} |a_\gamma|$. Es soll gezeigt werden, dass die folgenden Dualraumbeziehungen gelten:

$$\text{(a)} \quad c_0' = \ell_1 \qquad\qquad \text{(b)} \quad \ell_1' = \ell_\infty.$$

Um $X' = Y$ zu zeigen, gehe in beiden Fällen wie folgt vor: (i) definiere eine lineare Einbettung $E : Y \to X'$, (ii) zeige, dass E normtreu ist und (iii) dass E surjektiv ist. (Hinweis: Die Einheitsvektoren $e^j = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots)$ und die Dichtheit von $A = \operatorname{span}\{ e^j \mid j \in \mathbb{N} \} = \{\text{abbrechende Folgen}\}$ sind hilfreich.)

(c) Gebe ein $F \in \ell_\infty'$ an, dass nicht in der Form $Ea : x \mapsto \sum_{\mathbb{N}} a_j x_j$ mit $a \in \ell_1$ dargestellt werden kann.

Aufgabe 45 (Adjungierte Abbildungen):

Es seien X, Y und Z reelle Banach–Räume und $T, T_1, T_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$ sowie $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$.

(a) Zeige für $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ die Beziehungen

(i) $(\lambda_1 T_1 + \lambda_2 T_2)' = \lambda_1 T_1' + \lambda_2 T_2'$ (ii) $(ST)' = T'S'$ (iii) $(\mathrm{id}_X)' = \mathrm{id}_{X'}$ (iv) $J_Y T = T'' J_X$

Dabei bezeichnet "id_V" die Identitätsabbildung in V und $J_V : V \to V''$ die Einbettung in den Bidual.

(b) Folgere aus (a), dass mit T auch T' bijektiv ist und dass dann $(T')^{-1} = (T^{-1})'$ gilt.

(c) Für $j = 1, \ldots, N$ seien $x_j' \in X'$ und $y_j \in Y$ gegeben. Zeige, dass $Ax = \sum_{j=1}^N x_j'(x) y_j$ einen Operator in $\mathcal{L}(X, Y)$ definiert und berechne den adjungierten Operator A' explizit.

Aufgabe 46 (Reflexivität):

Es soll gezeigt werden, dass ein Banach–Raum X genau dann **reflexiv** ist, wenn X' reflexiv ist. Dabei seien $J_X : X \to X''$ und $J_{X'} : X' \to X'''$ die Einbettungen von X bzw. X' in ihre Biduale.

(a) Betrachte die Einbettung $E : X''' \to X'; x''' \mapsto x''' \circ J_X$ und zeige, dass E normtreu ist, falls X reflexiv ist. Zeige weiter $J_{X'} E = \mathrm{id}_{X'}$ und folgere daraus die Reflexivität von X'.

(b) Verifiziere die Formeln $J_{X'} \circ (J_X)' = \mathrm{id}_{X'''}$ und $J_{X'} = (J_X^{-1})'$.

(c) Leite nun aus der Reflexivität von X' diejenige von X her. (Betrachte $J_X(X)$ als Unterraum von X''.)

Termine:
Do. 26. Januar 2006: Themenliste anstelle des Übungsblattes
Do.+Fr. 2.+3. Februar 2006: Wiederholung des Stoffes in den Übungen
Mo. 6. Februar 2006: Übungsklausur