Übungsblatt 12

Aufgabe 41 (Eindimensionale Differentialoperatoren): Es sei $\Omega = (0,\ell) \subset \mathbb{R}$ ein beschränktes Intervall. Es sollen verschiedene schwache Formulierungen der gewöhnlichen Differentialgleichung

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(a(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x)\Big) + b(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u(x) + c(x)u(x) = f(x) \text{ in } \Omega \quad \text{und} \quad u(0) = u(\ell) = 0 \quad \text{(GDG)}$$

untersucht werden. Dabei seien $a, b, c \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ und $a(x) \geq \alpha$ für f.a. $x \in \Omega$ für ein $\alpha > 0$.

(a) Es sei $\rho \in \mathrm{C}^1(\overline{\Omega}; (0,\infty))$. Zeige, dass durch

$$\|f\|_\rho = \Big(\int_0^\ell |f(x)|^2 \rho(x)\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} \text{ und } \|u\|_{1,\rho} = \Big(\int_0^\ell \big[|u(x)|^2 + |u'(x)|^2\big]\rho(x)\,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}$$

äquivalente Skalarproduktnormen auf $\mathrm{L}^2(\Omega)$ bzw. auf $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ definiert sind.

(b) Für $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ schreibe (GDG) in der schwachen Form

$$\forall\, v \in \mathrm{H}^1_0(\Omega): \ \mathcal{A}_\rho(u,v) := \int_0^\ell \big(au'v' + \beta u'v + cuv\big)\rho\,\mathrm{d}x = \langle f, v\rangle_\rho := \int_0^\ell f(x)v(x)\rho(x)\,\mathrm{d}x.$$

Wie muss dazu $\beta \in \mathrm{L}^\infty(\Omega)$ gewählt werden?

(c) Kann ρ so gewählt werden, dass die Bilinearform $\mathcal{A}_\rho$ in (b) symmetrisch wird?

(d) Folgere, dass (GDG) unter der Voraussetzung $c(x) \geq 0$ f.ü. in Ω stets lösbar ist, also keine "Kleinheit" von b benötigt wird.

Aufgabe 42 (Poincarésche **Ungleichungen):**
Für $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ist die Poincarésche Konstante definiert durch

$$\Lambda_\mathrm{P}(\Omega) := \inf\Big\{ \int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x \ \Big|\ u \in \mathrm{H}^1_0(\Omega),\ \int_\Omega u^2\,\mathrm{d}x = 1\Big\}.$$

Hinweis: Aufgrund der Dichtheit kann $\mathrm{H}^1_0(\Omega)$ auch durch $\mathrm{C}^\infty_\mathrm{c}(\Omega)$ ersetzt werden.

(a) Gebe ein Gebiet mit $\Lambda_\mathrm{P}(\Omega) = 0$ an und zeige $\Lambda_\mathrm{P}(y+r\Omega) = r^{-2}\Lambda_\mathrm{P}(\Omega)$, wobei $y + r\Omega = \{\, y + rx \mid x \in \Omega \,\}$ für $r > 0$ und $y \in \mathbb{R}^d$ gelte.

(b) Für $\Omega_1 \subset \Omega_2$ zeige $\Lambda_\mathrm{P}(\Omega_1) \geq \Lambda_\mathrm{P}(\Omega_2)$.

(c) Mittels Fourier–Reihen–Entwicklung berechne $\Lambda_\mathrm{P}(\Omega)$ für $\Omega = (a,b) \subset \mathbb{R}$.

(d) Es sei $\Sigma_1 \subset \mathbb{R}^{d_1}$ und $\Sigma_2 \subset \mathbb{R}^{d_2}$. Für das "Rechteck" $\Sigma_1 \times \Sigma_2 \subset \mathbb{R}^{d_1+d_2}$ gilt dann

$$\Lambda_\mathrm{P}(\Sigma_1 \times \Sigma_2) = \Lambda_\mathrm{P}(\Sigma_1) + \Lambda_\mathrm{P}(\Sigma_2).$$

Folgere für die Quader $Q = \prod_1^d (a_i, b_i) \subset \mathbb{R}^d$ die Formel $\Lambda_\mathrm{P}(Q) = \sum_1^d 4\pi^2/(b_i - a_i)^2$.
(Hinweis: Fubini und Aufgabe 19)

bitte wenden

Aufgabe 43 (Allgemeine Randbedingungen): Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet mit glattem Rand $\partial\Omega$. Damit definieren wir die Bilinearform

$$\mathcal{A}(u,v) = \int_\Omega \big(A\nabla u\big)\cdot\nabla v + B\cdot\nabla u\, v + c\, u\, v \;\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} k\, u\, v \;\mathrm{d}a,$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{d\times d}$, $B \in \mathbb{R}^d$ und $c, k \in \mathbb{R}$ seien (also konstant in Ω).

(a) Folgere aus der Stetigkeit der linearen Spurabbildung $\Gamma : \mathrm{H}^1(\Omega) \to \mathrm{L}^2(\partial\Omega);\; u \mapsto u|_{\partial\Omega}$ (ohne diese zu beweisen) die Abschätzung $|\mathcal{A}(u,v)| \leq C\|u\|_{\mathrm{H}^1}\|v\|_{\mathrm{H}^1}$ für alle $u, v \in \mathrm{H}^1(\Omega)$.

(b) Es sei nun $u \in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$ eine Lösung des schwachen Randwertproblems

$$\forall\, v \in \mathrm{H}^1(\Omega):\;\; \mathcal{A}(u,v) = \int_\Omega f_{\mathrm{Vol}}\, v \,\mathrm{d}x + \int_{\partial\Omega} f_{\mathrm{Ober}} v \,\mathrm{d}a. \tag{SRWP}$$

Zeige, dass u eine Lösung des folgenden klassischen Randwertproblems ist:

$$-\operatorname{div}\big(A\nabla u\big) + B\cdot\nabla u + c\, u = f_{\mathrm{Vol}} \;\text{ in } \Omega, \qquad \big(A\nabla u\big)\cdot\nu + k\, u = f_{\mathrm{Ober}} \;\text{ auf } \partial\Omega. \tag{KRWP}$$

Hinweis: Verwende zunächst $v \in \mathrm{C}_\mathrm{c}^\infty(\Omega)$ und Dichtheit.

(c) Es sei nun $A = A^\top > 0$ (pos.def.) fest. Zeige, dass es für alle $B \in \mathbb{R}^d$ und $k \in \mathbb{R}$ ein $c_0 = C(A, B, k) \in \mathbb{R}$ gibt, so dass (SRWP) für alle $c > c_0$ und alle $f_{\mathrm{Vol}} \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ und $f_{\mathrm{Ober}} \in \mathrm{L}^2(\partial\Omega)$ eine eindeutige Lösung besitzt.