

## Übungsblatt 11

**Aufgabe 38 (Orthogonalprojektion):** Es sei  $H$  ein HILBERT-Raum und  $A$  eine konvexe abgeschlossene Teilmenge darin. Weiter bezeichnet  $P_A : H \rightarrow A \subset H$  die Orthogonalprojektion mit  $\|x - P_A(x)\| = \inf\{\|x - a\| \mid a \in A\}$ .

(a) Für beliebige  $x_1, x_2 \in H$  zeige  $\operatorname{Re}\langle x_1 - x_2, P_A(x_1) - P_A(x_2) \rangle \geq \|P_A(x_1) - P_A(x_2)\|^2$ . Folgere daraus die Abschätzung  $\|P_A(x_1) - P_A(x_2)\| \leq \|x_1 - x_2\|$ .

(b) Es gelte  $A = \operatorname{Span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ , wobei die Vektoren  $e_1, \dots, e_n$  orthogonal zueinander stehen sollen. Gebe  $P_A$  explizit an.

(c) Es sei  $X = C^0([-1, 1])$  der mit der üblichen Supremumsnorm versehene BANACH-Raum und

$$A_\alpha = \{f \in X \mid \int_{-1}^0 f(t) dt - \int_0^1 f(t) dt = \alpha\}.$$

Zeige, dass  $A_\alpha$  in  $X$  abgeschlossen und konvex ist. Berechne  $d(\alpha) := \inf\{\|0 - f\|_\infty \mid f \in A_\alpha\}$ . Für welche  $\alpha \in \mathbb{R}$  gibt es ein  $f \in A_\alpha$  mit  $d(\alpha) = \|0 - f\|_\infty$ ?

**Aufgabe 39 (Orthogonale Komplemente):** Sei  $H$  ein HILBERT-Raum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Für eine beliebige Menge  $M \subset H$  setzen wir

$$\begin{aligned} M^\perp &:= \{x \in H \mid \forall y \in M : \langle x, y \rangle = 0\} \quad (\text{Orthogonalraum zu } M) \\ [M] &:= \operatorname{Span}(M) = \{\sum_{j=1}^N \lambda_j x_j \mid N \in \mathbb{N}, \lambda_j \in \mathbb{K}, x_j \in M\} \\ \overline{M} &:= \operatorname{Abschluss}(M) = \operatorname{cl}(M) = \{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \mid x_n \in M\}. \end{aligned}$$

Weiter sei  $M^{\perp\perp} = (M^\perp)^\perp$ . Zeige folgende Aussagen:

(a)  $M^\perp$  ist abgeschlossener, linearer Unterraum von  $H$ .

(b)  $M_1 \subset M_2 \subset H \implies M_2^\perp \subset M_1^\perp$ .

(c)  $M^\perp = [M]^\perp = (\overline{[M]})^\perp$ .

(d)  $[M] \subset M^{\perp\perp}$ ,  $H = \overline{[M]} \oplus M^\perp$  und  $\overline{[M]} = M^{\perp\perp}$ .

(e) Ist  $P$  die orthogonale Projektion auf  $\overline{[M]}$ , so gilt  $\langle Px, y \rangle = \langle x, Py \rangle$  für alle  $x, y \in H$ .

**Aufgabe 40 (Quadratische Minimierungsprobleme):** Es sei  $H$  ein reeller HILBERT-Raum mit Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  und Norm  $\|\cdot\|$ . Weiter sei  $C > 0$  und  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  eine symmetrische Bilinearform mit  $\frac{1}{C}\|x\|^2 \leq a(x, x) \leq C\|x\|^2$  für alle  $x \in H$ .

(a) Zeige, dass mittels  $((x, y)) := a(x, y)$  ein Skalarprodukt auf  $H$  definiert wird und dass die zugehörige Norm  $\|\cdot\|$  zur ursprünglichen Norm äquivalent ist.

(b) Sei nun  $F \in H' = \mathcal{L}(H, \mathbb{R})$  eine stetige Linearform auf  $H$  und

$$J(x) = \frac{1}{2}a(x, x) - F(x).$$

Zeige, dass  $x_* \in H$  genau dann die Funktion  $J$  minimiert (d.h.,  $J(x_*) = \mu := \inf\{J(x) \mid x \in H\}$ ), wenn  $x_*$  für alle  $y \in H$  die Beziehung  $a(x_*, y) = F(y)$  erfüllt.

(c) Zeige ohne Verwendung des Satzes von LAX-MILGRAM, dass  $J$  einen eindeutigen Minimierer besitzt. Verwende dazu das WEIERSTRASS'sche Prinzip: Wähle eine Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  mit  $J(x_k) \rightarrow \mu$  und zeige dass  $x_k$  eine CAUCHY-Folge ist. (Hinweis: Der Beweis des Projektionssatzes und Teil (a) können hilfreich sein.)