

## Übungsblatt 10

**Aufgabe 35 (Stetige Fortsetzbarkeit des Grenzwertes):** Es seien  $X$  und  $Y$  BANACH-Räume und  $S \subset X$  sei dicht. Weiter gelte für  $T_n \in \mathcal{L}(X, Y)$  mit

- (i)  $\exists C > 0 \forall n \in \mathbb{N} : \|T_n\|_{X \rightarrow Y} \leq C,$
- (ii)  $\forall s \in S : \lim_{n \rightarrow \infty} T_n s$  existiert.

Zeige folgende Aussagen:

- (a) Die Abbildung  $\tilde{T} : S \rightarrow Y; s \mapsto \lim_{n \rightarrow \infty} T_n s$  ist linear und stetig.
- (b) Es existiert ein eindeutiges  $T \in \mathcal{L}(X, Y)$  mit  $T|_S = \tilde{T}$ .
- (c)  $\forall x \in X : Tx = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n x.$

**Aufgabe 36 (Zu den vier Grundprinzipien):** Es sei  $X = L^2((1, \infty))$  mit der üblichen  $\|\cdot\|_2$ -Norm.

- (a) Weiter sei  $\mathcal{D} = \{f \in X \mid \int_1^\infty x^2 |f(x)|^2 dx < \infty\}$  und  $T : \mathcal{D} \rightarrow X$  mit

$$(Tf)(x) = xf(x) \text{ für f.a. } x \in (1, \infty).$$

Hierbei sei  $\mathcal{D}$  als Teilmenge von  $X$  aufgefasst und folglich mit der gleichen Norm wie  $X$  versehen. Zeige, dass  $T : \mathcal{D} \rightarrow X$  linear aber nicht stetig ist. Ist der Graph von  $T$  abgeschlossen in  $X \times X$ ?

- (b) Nun sei  $\mathcal{C} = C_c^0((1, \infty)) = \{f \in C^0((1, \infty)) \mid \exists \delta > 0 : \text{sppt}(f) \subset [1+\delta, 1/\delta] \Subset (1, \infty)\}$  wiederum als Teilmenge von  $X$  mit der  $\|\cdot\|_2$ -Norm versehen. Für  $n \in \mathbb{N}$  seien die Operatoren  $T_n : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$  definiert durch

$$(T_n f)(x) = \max\{0, \min\{x, 2n-x\}\} f(x) \text{ für } x > 1.$$

Ist die Folge  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  punktweise beziehungsweise gleichmäßig beschränkt?

- (c) Gebe ein  $X$ , ein  $T$  und eine Folge  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $\mathcal{L}(X, X)$  an, so dass für alle  $x \in X$  die Beziehung  $T_n x \rightarrow Tx$  in  $X$  gilt, aber nicht  $T_n \rightarrow T$  in  $\mathcal{L}(X, X)$ .

**Aufgabe 37 (Translationsoperatoren):** Für  $p \in [1, \infty]$  und  $h \in \mathbb{R}^d$  definieren wir den Translationsoperator

$$\mathcal{T}_h : L^p(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^d); (\mathcal{T}_h f)(x) = f(x-h) \text{ für f.a. } x \in \mathbb{R}^d.$$

Zeige folgende Aussagen:

- (a)  $\mathcal{T}_h \in \mathcal{L}(L^p(\mathbb{R}^d), L^p(\mathbb{R}^d))$  und berechne die Operatornorm.
- (b) Für alle  $f \in C_c^0(\mathbb{R}^d)$  konvergiert  $\mathcal{T}_h f$  für  $h \rightarrow 0$  in  $L^p(\mathbb{R}^d)$  gegen  $f$ .
- (c) Für  $p \in [1, \infty)$  und  $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$  gilt  $\|\mathcal{T}_h f - f\|_p \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$ .
- (d) Die Aussage (c) gilt nicht für  $p = \infty$ . Gebe einen möglichst großen Unterraum von  $L^\infty(\mathbb{R}^d)$  an, auf dem  $\|\mathcal{T}_h f - f\|_\infty \rightarrow 0$  für  $h \rightarrow 0$  gilt.

*Fröhliche Weihnachten und einen Guten Start in ein Neues, Erfolgreiches Jahr*