

## *General Information*

**Additional tutorial: Thu, 11-13h, Room 1.410 RUD 25.** Please distribute evenly between the two groups. Language of tutorials will be decided according to participants.

**The following are information in German language concerning the structure of the tutorials and criteria for obtaining a course certificate. They are identical to those given in the lecture.** Die Übungsblätter werden jeweils am Donnerstag auf die Kurs-Homepage gestellt und evtl. zusätzlich in der Vorlesung ausgeteilt. Die Lösung der als "schriftlich" markierten Aufgabe(n) ist am Anfang der eigenen Übung am darauf folgenden Dienstag bzw. Donnerstag abzugeben. Dabei sind Abgaben in Gruppen bis zu drei Studenten zulässig. Ebenfalls am Anfang der Übung ist anzugeben, welche der als "mündlich" (oral) markierten Aufgaben vorgerechnet werden können. Der Übungsleiter wird an Hand dieser Liste die Studenten zum Vortragen an die Tafel bitten. Eine dann nicht ernsthaft erfolgende Lösungspräsentation führt zur Annullierung sämtlicher Leistungen der entsprechenden Übung.

Leistungskriterien sind:

1. Abgabe der schriftlichen Aufgabe(n).
2. Angabe von zur Präsentation vorbereiteten Aufgaben ("ankreuzen").
3. Mündliches Engagement sowie die Lösungspräsentationen (100% entspricht 2 vollständigen Aufgaben).
4. Klausur in der zweiten Semesterhälfte.

Ein Leistungsnachweis zur Veranstaltung ("Schein") wird ausgegeben, wenn

- (i) bei 1. bis 4. jeweils mindestens 25% erreicht wurden, sowie
- (ii) insgesamt mindestens 40% erreicht wurde mit folgender Gewichtung:  
Abgabe: 20%; Ankreuzen: 10%; Präsentation: 20%; Klausur: 50%;

Je nach Studiengang wird der Leistungsnachweis benotet. Dies geschieht gegebenenfalls mit der unter (ii) angegebenen Gewichtung.

(bitte wenden)

## Exercise Sheet 2

### Exercise 5 (Two inequalities) - written

Let  $p, q \in (1, \infty)$  with  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . For  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$  we define

$$\|x\|_p := \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}$$

(a) For  $a, b > 0$ , prove Young's inequality:  $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$ .

(b) For  $x, y \in \mathbb{K}^n$ , prove Hölder's inequality:

$$\sum_{i=1}^n |x_i y_i| \leq \|x\|_p \|y\|_q$$

Hint: Use Young's inequality with  $a = \frac{|x_i|}{\|x\|_p}$  and  $b = \frac{|y_i|}{\|y\|_q}$  and sum over  $i$ .

### Exercise 6 (The Hilbert space $\ell_2$ ) - oral

Let  $\Gamma$  be a finite or countable set and

$$\ell_2(\Gamma) := \left\{ (a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \mid \sum_{\gamma \in \Gamma} |a_\gamma|^2 < \infty \right\}$$

(a) Show that  $\langle a, b \rangle := \sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma \bar{b}_\gamma$  is well-defined and satisfies the axioms of a scalar product.

(b) Show that  $(\ell_2(\Gamma), \langle \cdot, \cdot \rangle)$  is a Hilbert space.

### Exercise 7 (Hölder spaces) - oral

Let  $G \subset \mathbb{R}^d$  be a bounded domain. For  $\alpha \in (0, 1]$ , we define the Hölder spaces

$$\begin{aligned} C^\alpha(G) &:= \{ f \in C(G) \mid f \text{ bounded, } h_\alpha(f) < \infty \} \\ h_\alpha(f) &:= \sup \left\{ \frac{|f(s) - f(t)|}{|s - t|^\alpha} \mid s, t \in G, s \neq t \right\} \end{aligned}$$

and the Hölder norms  $\|f\|_\alpha := \|f\|_\infty + h_\alpha(f)$ .

(a) Show that  $(C^\alpha(G), \|\cdot\|_\alpha)$  is a normed real vector space.

(b) Now let  $G := [0, 1] \subset \mathbb{R}$ . For  $\alpha \in (0, 1]$ , construct a function  $g_\alpha \in C^\alpha(G)$  such that  $g_\alpha \notin C^\beta(G)$  for every  $\beta > \alpha$ . Moreover, construct a function  $g_* \in C^0(G)$  such that  $g_* \notin C^\alpha(G)$  for every  $\alpha > 0$ .

(c) Show that, for  $0 < \alpha < \beta \leq 1$ , the norm  $\|\cdot\|_\beta$  is stronger than the norm  $\|\cdot\|_\alpha$ .

(d) Show that  $(C^\alpha(G), \|\cdot\|_\alpha)$  is a Banach space.

(bitte wenden)

### Exercise 8 (Banach's fixed point theorem) - oral

Let  $(X, \|\cdot\|)$  be a Banach space. Prove the following.

(a) Let  $M \subset X$  be closed and  $\Phi : M \rightarrow M$  be a contraction with contraction constant  $\kappa < 1$ . Then  $\Phi$  has a unique fixed point  $x^*$ , and for every  $x_0 \in M$  we have for the iterations  $x_{n+1} = \Phi(x_n)$  the a priori estimate

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{\kappa^n}{1 - \kappa} \|x_0 - \Phi(x_0)\|.$$

(b) Let  $\Psi : X \rightarrow X$  be a map such that there exist  $R > 0$ ,  $\kappa \in (0, 1)$  and  $y \in X$  such that for all  $x_1, x_2 \in \overline{B_R(y)} = \{x \in X \mid \|x - y\| \leq R\}$

$$\|\Psi(x_1) - \Psi(x_2)\| \leq \kappa \|x_1 - x_2\| \quad \text{and} \quad \|y - \Psi(y)\| \leq (1 - \kappa)R.$$

Then  $\Psi$  has a fixed point in  $\overline{B_R(y)}$ .

(c) Choose a norm in  $\mathbb{R}^2$  of the form  $\|(x_1, x_2)\| = |x_1| + a|x_2|$  such that for the map

$$\Psi(x) := \left( \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{16} + 4x_2^4, \frac{1}{16} \sin x_1 + \frac{1}{2}x_2 \right)$$

a fixed point near 0 can be found according to (b).