## *Allgemeine Informationen*

Sprache: Bei Bedarf englisch, sonst deutsch.
**Language: English if requested, otherwise German.**

Vorlesung: Do, 9-11 Uhr und 13-15, Raum 1.013 RUD 25
*Erster Termin: Donnerstag, 20.10.2011*

Übung: Di, 13-15 Uhr, Raum 3.007 RUD 25
*Erster Termin: Dienstag, 25.10.2011*

Kurs-Homepage: http://www.wias-berlin.de/people/mielke/teaching.jsp

## *Übungsblatt 1*

### Aufgabe 1 (Faktorisierung) - schriftlich

Es sei $(X, \mathbb{K}, N)$ ein halbnormierter Vektorraum. Zeige:

(a) $V = \{\, x \in X \mid N(x) = 0 \,\}$ ist ein linearer Unterraum.

(b) $x \sim y \;\Leftrightarrow\; N(x-y) = 0$ definiert eine Äquivalenzrelation.

(c) $\|[x]_\sim\|_\sim \overset{\text{def}}{=} N(x)$ ist wohldefiniert (Repräsentantenunabhängigkeit).

(d) $(X_{/\sim}, \mathbb{K}, \|\cdot\|_\sim)$ ist ein normierter Vektorraum.

### Aufgabe 2 (Vergleichbare Normen) - mündlich

Sind auf dem Vektorraum $X$ zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ gegeben, so heißt $\|\cdot\|_2$ *stärker* als $\|\cdot\|_1$ falls es ein $C > 0$ gibt, so dass $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ für alle $x \in X$ gilt. Die Normen heißen *äquivalent*, falls $\|\cdot\|_1$ stärker als $\|\cdot\|_2$ ist und gleichzeitig $\|\cdot\|_2$ stärker als $\|\cdot\|_1$ ist.

(a) Betrachte auf $\mathrm{C_c}(\mathbb{R}) \overset{\text{def}}{=} \{\, f \in \mathrm{C}(\mathbb{R}) \mid \exists\, R > 0\colon |t| \geq R \;\Rightarrow\; f(t) = 0 \,\}$ die beiden Normen

$$\|f\|_1 = \int_{\mathbb{R}} |f(t)|\,\mathrm{d}t \quad \text{und} \quad \|f\|_\infty = \sup\{\, |f(t)| \mid t \in \mathbb{R} \,\}.$$

Zeige, dass keine der Normen stärker als die andere ist. (Konstruiere dazu geeignete Folgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die das jeweilige "Stärkersein" zum Widerspruch führen.)

(b) Sei nun $-\infty < a < b < \infty$ und $X = \mathrm{C}([a, b])$. Weiter seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_\infty$ wie in (a) gegeben, wobei $\mathbb{R}$ durch $[a, b]$ ersetzt ist. Zeige, dass $\|\cdot\|_\infty$ stärker als $\|\cdot\|_1$ ist und dass die Normen nicht äquivalent sind.

(bitte wenden)

### Aufgabe 3 (Vervollständigungen) - mündlich

Sei $X$ ein Vektorraum, und seien $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ zwei Normen auf $X$ so dass $\|\cdot\|_2$ stärker als $\|\cdot\|_1$ ist. Sei $B_i$ die Vervollständigung von $(X, \|\cdot\|_i)$ $(i = 1, 2)$. Konstruiere eine lineare Abbildung $K : B_2 \to B_1$, für die das Diagramm

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "j_2"'] \arrow[dr, "j_1"] & \\ B_2 \arrow[rr, dotted, "K"'] & & B_1 \end{tikzcd}$$

kommutiert und die beschränkt ist in folgendem Sinne. Es existiert $C \geq 0$ so dass für alle $x \in B_2$ die Ungleichung $\|Kx\|_1 \leq C\|x\|_2$ gilt.

Bemerkung: Die letzte Aussage bedeutet, dass $K$ stetig ist. $K$ ist i.A. nicht injektiv.

### Aufgabe 4 (Der Folgenraum $\ell_1$) - mündlich

Es seien $\Gamma$ eine beliebige unendliche, abzählbare Menge (z.B. $\mathbb{N}$) und

$$\ell_1 = \{\, (a_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \mid \|(a_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}\|_1 < \infty \,\} \quad \text{mit } \|(a_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}\|_1 = \sum_{\gamma\in\Gamma} |a_\gamma|\,.$$

(a) Zeige, dass $(\ell_1, \|\cdot\|_1)$ ein normierter Vektorraum ist.

(b) Überprüfe, ob der Raum vollständig ist.

(c) Finde eine beschränkte Folge, die keinen Häufungspunkt hat.