



**Weierstraß-Institut für
Angewandte Analysis und Stochastik**



Was ist Zufall und wie kam er in die Mathematik?

Wolfgang König (WIAS und TU Berlin)

... oder ist das nur ein menschliches Konstrukt?

- Wenn ich einen alten Freund wiedersehe, den ich zwanzig Jahre nicht mehr gesehen habe, ist das Zufall?
- Wenn das Blatt im Herbst vom Baum fällt und genau dort zu liegen kommt, ist das Zufall?
- Ist etwas schon zufällig, nur weil ich nicht weiß, ob es eintritt oder nicht?
- Was soll es heißen, wenn der Wetterbericht für morgen eine Regenwahrscheinlichkeit von 40 Prozent vorhersagt?
- Ist die Lehre vom Zufall überhaupt eine **mathematische** Theorie?

... oder ist das nur ein menschliches Konstrukt?

- Wenn ich einen alten Freund wiedersehe, den ich zwanzig Jahre nicht mehr gesehen habe, ist das Zufall?
- Wenn das Blatt im Herbst vom Baum fällt und genau dort zu liegen kommt, ist das Zufall?
- Ist etwas schon zufällig, nur weil ich nicht weiß, ob es eintritt oder nicht?
- Was soll es heißen, wenn der Wetterbericht für morgen eine Regenwahrscheinlichkeit von 40 Prozent vorhersagt?
- Ist die Lehre vom Zufall überhaupt eine **mathematische** Theorie?

Wenn ein (mathematischer) Wahrscheinlichkeitstheoretiker gefragt wird "Glaubst Du an Zufall?", was ist vermutlich seine Antwort?

... oder ist das nur ein menschliches Konstrukt?

- Wenn ich einen alten Freund wiedersehe, den ich zwanzig Jahre nicht mehr gesehen habe, ist das Zufall?
- Wenn das Blatt im Herbst vom Baum fällt und genau dort zu liegen kommt, ist das Zufall?
- Ist etwas schon zufällig, nur weil ich nicht weiß, ob es eintritt oder nicht?
- Was soll es heißen, wenn der Wetterbericht für morgen eine Regenwahrscheinlichkeit von 40 Prozent vorhersagt?
- Ist die Lehre vom Zufall überhaupt eine **mathematische** Theorie?

Wenn ein (mathematischer) Wahrscheinlichkeitstheoretiker gefragt wird "Glaubst Du an Zufall?", was ist vermutlich seine Antwort?

Ich vermute:

"Weiß ich nicht"

Gibt es Zufall überhaupt?

... oder ist das nur ein menschliches Konstrukt?

- Wenn ich einen alten Freund wiedersehe, den ich zwanzig Jahre nicht mehr gesehen habe, ist das Zufall?
- Wenn das Blatt im Herbst vom Baum fällt und genau dort zu liegen kommt, ist das Zufall?
- Ist etwas schon zufällig, nur weil ich nicht weiß, ob es eintritt oder nicht?
- Was soll es heißen, wenn der Wetterbericht für morgen eine Regenwahrscheinlichkeit von 40 Prozent vorhersagt?
- Ist die Lehre vom Zufall überhaupt eine **mathematische** Theorie?

Wenn ein (mathematischer) Wahrscheinlichkeitstheoretiker gefragt wird "Glaubst Du an Zufall?", was ist vermutlich seine Antwort?

Ich vermute:

"Weiß ich nicht" oder "Nein, aber das ist egal!"

Wäre das ein Skandal?

Was ist die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses?

Die frühe Wahrscheinlichkeitsrechnung war hauptsächlich motiviert durch Glücksspiele bzw. durch das Finanz- und Versicherungswesen.

Was ist die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses?

Die frühe Wahrscheinlichkeitsrechnung war hauptsächlich motiviert durch Glücksspiele bzw. durch das Finanz- und Versicherungswesen.

Frequentistische Definition

Die **Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses** (= des Ausgangs eines Experimentes, das man oft unter gleichen Bedingungen wiederholen kann) ist der **Grenzwert** der **relativen Häufigkeit** des Eintretens dieses Ereignisses bei **vielen Wiederholungen**.

- Wahrscheinlichkeit als physikalische Größe, die man beliebig genau messen kann und Messfehlern unterliegt
- stark von Glücksspielen und physikalischer Intuition beeinflusst
- versagt bei Experimenten, die man nicht oft wiederholen kann

Was ist die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses?

Die frühe Wahrscheinlichkeitsrechnung war hauptsächlich motiviert durch Glücksspiele bzw. durch das Finanz- und Versicherungswesen.

Frequentistische Definition

Die **Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses** (= des Ausgangs eines Experimentes, das man oft unter gleichen Bedingungen wiederholen kann) ist der **Grenzwert** der **relativen Häufigkeit** des Eintretens dieses Ereignisses bei **vielen Wiederholungen**.

- Wahrscheinlichkeit als physikalische Größe, die man beliebig genau messen kann und Messfehlern unterliegt
- stark von Glücksspielen und physikalischer Intuition beeinflusst
- versagt bei Experimenten, die man nicht oft wiederholen kann

BAYES'sche Definition

Die **Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses** ist ein **Maß** dafür, wie stark man von dem Eintreten des Ereignisses **überzeugt** ist.

Was ist die Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses?

Die frühe Wahrscheinlichkeitsrechnung war hauptsächlich motiviert durch **Glücksspiele** bzw. durch das **Finanz- und Versicherungswesen**.

Frequentistische Definition

Die **Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses** (= des Ausgangs eines Experimentes, das man oft unter gleichen Bedingungen wiederholen kann) ist der **Grenzwert** der **relativen Häufigkeit** des Eintretens dieses Ereignisses bei **vielen Wiederholungen**.

- Wahrscheinlichkeit als physikalische Größe, die man beliebig genau messen kann und Messfehlern unterliegt
- stark von Glücksspielen und physikalischer Intuition beeinflusst
- versagt bei Experimenten, die man nicht oft wiederholen kann

BAYES'sche Definition

Die **Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses** ist ein **Maß** dafür, wie stark man von dem Eintreten des Ereignisses **überzeugt** ist.

- Motto: Wieviel wärest Du bereit zu setzen? Sehr pragmatisch.
- Antwort hängt vom Betrachter ab.

Warum ist die Frage nach dem Zufall so schwierig?

- Weil man eine mathematische, zumindest eine **wissenschaftliche Antwort** haben möchte.
- Weil der Mensch eine **schlechte Intuition** für Wahrscheinlichkeiten hat (Beispiele folgen).
- Weil die Anwendungen lange Zeit **anrühlich** waren (Würfelspiele!)
- Weil eine Lehre von der Unsicherheit ein **Widerspruch in sich** zu sein scheint (das “Wissen über das Nichtwissen”).
- Weil viele Leute **nicht an Zufall glauben**.
- Weil es **nicht leicht** ist, eine mathematische Theorie der Wahrscheinlichkeiten zu gründen (mehr darüber später).

Warum ist die Frage nach dem Zufall so schwierig?

- Weil man eine mathematische, zumindest eine **wissenschaftliche Antwort** haben möchte.
- Weil der Mensch eine **schlechte Intuition** für Wahrscheinlichkeiten hat (Beispiele folgen).
- Weil die Anwendungen lange Zeit **anrühlich** waren (Würfelspiele!)
- Weil eine Lehre von der Unsicherheit ein **Widerspruch in sich** zu sein scheint (das “Wissen über das Nichtwissen”).
- Weil viele Leute **nicht an Zufall glauben**.
- Weil es **nicht leicht** ist, eine mathematische Theorie der Wahrscheinlichkeiten zu gründen (mehr darüber später).

Zerschlagung des Gordischen Knotens:

Zufall (in dem Sinne, in dem man ihn lange verstehen wollte) ist kein **mathematischer** Begriff, sondern ein **philosophischer**. Die Mathematik versucht gar nicht erst, ihn in seiner Tiefe zu ergründen, sondern formuliert nur Rechenregeln! (\implies KOLMOGOROV 1933, siehe später)

Geburtstagsparadoxon

Auf dem Fußballplatz stehen 23 Leute. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben mindestens zwei von ihnen am selben Tag Geburtstag?

Geburtstagsparadoxon

Auf dem Fußballplatz stehen 23 Leute. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben mindestens zwei von ihnen am selben Tag Geburtstag?

- **Antwort:** Diese Wahrscheinlichkeit ist ungefähr $1/2$.

Geburtstagsparadoxon

Auf dem Fußballplatz stehen 23 Leute. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben mindestens zwei von ihnen am selben Tag Geburtstag?

- **Antwort:** Diese Wahrscheinlichkeit ist ungefähr $1/2$.

Das Aufteilungsparadoxon

Zwei Spieler spielen ein faires Spiel auf sechs Gewinnsätze. Es muss beim Stande von fünf zu drei Gewinnsätzen abgebrochen werden. Wie teilt man den Siegespreis gerecht auf?

Geburtstagsparadoxon

Auf dem Fußballplatz stehen 23 Leute. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben mindestens zwei von ihnen am selben Tag Geburtstag?

- **Antwort:** Diese Wahrscheinlichkeit ist ungefähr $1/2$.

Das Aufteilungsparadoxon

Zwei Spieler spielen ein faires Spiel auf sechs Gewinnsätze. Es muss beim Stande von fünf zu drei Gewinnsätzen abgebrochen werden. Wie teilt man den Siegespreis gerecht auf?

- erste Publikation des Paradoxons 1494 in Venedig von FRA LUCA PACCIOLI, falsche Lösung publiziert von NICCOLO TARTAGLIA.
- oft genannte falsche Antworten: $5 : 3$ oder $2 : 1$.
- Was heißt "gerecht"? Nach den Gewinnchancen!

Geburtstagsparadoxon

Auf dem Fußballplatz stehen 23 Leute. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben mindestens zwei von ihnen am selben Tag Geburtstag?

- **Antwort:** Diese Wahrscheinlichkeit ist ungefähr $1/2$.

Das Aufteilungsparadoxon

Zwei Spieler spielen ein faires Spiel auf sechs Gewinnsätze. Es muss beim Stande von fünf zu drei Gewinnsätzen abgebrochen werden. Wie teilt man den Siegespreis gerecht auf?

- erste Publikation des Paradoxons 1494 in Venedig von FRA LUCA PACCIOLI, falsche Lösung publiziert von NICCOLO TARTAGLIA.
- oft genannte falsche Antworten: $5 : 3$ oder $2 : 1$.
- Was heißt "gerecht"? Nach den Gewinnchancen!
- richtige Lösung: $7 : 1$, denn in sieben von acht möglichen fiktiven Fortsetzungen gewinnt der Führende.

Das Würfelparadoxon

Ich spiele eine Serie von unabhängigen Glücksspielen und möchte mindestens einmal Erfolg haben. Bleiben meine Erfolgchancen gleich, wenn ich die Anzahl der Versuche versechsfache und die Einzel-Erfolgswahrscheinlichkeit durch Sechs teile?

Das Würfelparadoxon

Ich spiele eine Serie von unabhängigen Glücksspielen und möchte mindestens einmal Erfolg haben. Bleiben meine Erfolgchancen gleich, wenn ich die Anzahl der Versuche versechsfache und die Einzel-Erfolgswahrscheinlichkeit durch Sechs teile?

Nein: *Die Wahrscheinlichkeit, in vier Versuchen mindestens eine Sechs zu werfen, beträgt mit $\frac{671}{1296}$ etwas mehr als 50 Prozent. Hingegen beträgt beim 24maligen Versuch, mit zwei Würfeln eine Doppelsechs zu werfen (jeder Versuch hat die Gewinnchance $\frac{1}{36}$), die Gewinnchance knapp unter 50 Prozent.*

Das Würfelparadoxon

Ich spiele eine Serie von unabhängigen Glücksspielen und möchte mindestens einmal Erfolg haben. Bleiben meine Erfolgchancen gleich, wenn ich die Anzahl der Versuche versechsfache und die Einzel-Erfolgswahrscheinlichkeit durch Sechs teile?

Nein: *Die Wahrscheinlichkeit, in vier Versuchen mindestens eine Sechs zu werfen, beträgt mit $\frac{671}{1296}$ etwas mehr als 50 Prozent. Hingegen beträgt beim 24maligen Versuch, mit zwei Würfeln eine Doppelsechs zu werfen (jeder Versuch hat die Gewinnchance $\frac{1}{36}$), die Gewinnchance knapp unter 50 Prozent.*

- Falsche Intuition: Rechenregeln die für Erwartungswerte gelten, werden auf Wahrscheinlichkeiten angewendet.
- Lösung 1654 durch Blaise Pascal und Pierre de Fermat, die die Begriffe "Zufallsgröße" und ihren "Erwartungswert" schärften.

Der berühmte Briefwechsel Pascal - Fermat

BLAISE PASCAL diskutierte 1654 brieflich mit PIERRE DE FERMAT **Probleme**, die ihm der CHEVALIER DE MÉRÉ gestellt hatte.

Darunter waren auch das **Aufteilungsparadoxon** und das **Würfelparadoxon**.

Pascal und Fermat lösten sie, indem sie **fundamentale Begriffe** der Wahrscheinlichkeitsrechnung zunächst klärten.

Diese neuen Herangehensweisen wurden noch von Zeitgenossen als der **Beginn** einer wissenschaftlichen **Wahrscheinlichkeitstheorie** gefeiert.



BLAISE PASCAL (1623-1662)



PIERRE DE FERMAT (1607/8-1667)

Das Gefangenenparadoxon

Zwei von drei Gefangenen A , B und C sollen hingerichtet werden, aber sie wissen nicht, welche. Jeder hat also die Wahrscheinlichkeit $1/3$ zu überleben. A bittet den Wärter W , ihm einen von ihm verschiedenen Todeskandidaten zu benennen. W antwortet, dass B hingerichtet werden wird. Nun freut sich A , dass sich seine Überlebenschancen auf $1/2$ erhöht haben, denn nur noch C und er kommen in Frage, beide mit gleicher Chance.

Hat er Recht?

Das Gefangenenparadoxon

Zwei von drei Gefangenen A , B und C sollen hingerichtet werden, aber sie wissen nicht, welche. Jeder hat also die Wahrscheinlichkeit $1/3$ zu überleben. A bittet den Wärter W , ihm einen von ihm verschiedenen Todeskandidaten zu benennen. W antwortet, dass B hingerichtet werden wird. Nun freut sich A , dass sich seine Überlebenschancen auf $1/2$ erhöht haben, denn nur noch C und er kommen in Frage, beide mit gleicher Chance.

Hat er Recht?

- **Wichtig:** Wir gehen davon aus, dass, falls B und C hingerichtet werden, der Wärter beide mit gleicher Wahrscheinlichkeit nennt.
- Dann lautet die Antwort **Nein**, denn W 's Information enthält keine wesentliche neue Information. Daher ist die Überlebenschance von A gleich

$$\mathbb{P}(A \text{ überlebt} \mid W \text{ nennt } B) = \frac{\mathbb{P}(A \text{ überlebt, } W \text{ nennt } B)}{\mathbb{P}(W \text{ nennt } B)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{3} \cdot 1} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Das Gefangenenparadoxon

Zwei von drei Gefangenen A , B und C sollen hingerichtet werden, aber sie wissen nicht, welche. Jeder hat also die Wahrscheinlichkeit $1/3$ zu überleben. A bittet den Wärter W , ihm einen von ihm verschiedenen Todeskandidaten zu benennen. W antwortet, dass B hingerichtet werden wird. Nun freut sich A , dass sich seine Überlebenschancen auf $1/2$ erhöht haben, denn nur noch C und er kommen in Frage, beide mit gleicher Chance.

Hat er Recht?

- **Wichtig:** Wir gehen davon aus, dass, falls B und C hingerichtet werden, der Wärter beide **mit gleicher Wahrscheinlichkeit** nennt.
- Dann lautet die Antwort **Nein**, denn W 's Information enthält keine wesentliche neue Information. Daher ist die Überlebenschance von A gleich

$$\mathbb{P}(A \text{ überlebt} \mid W \text{ nennt } B) = \frac{\mathbb{P}(A \text{ überlebt, } W \text{ nennt } B)}{\mathbb{P}(W \text{ nennt } B)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{3} \cdot 1} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

- Falls W allerdings B mit Wahrscheinlichkeit p nennt, falls B und C hingerichtet werden, so ergibt sich die Überlebenschance von A als $\frac{p}{1+p}$!

- GEROLAMO CARDANO (1501-1576) schrieb 1524 das **erste Buch** über Wahrscheinlichkeitsrechnung: **De Ludo Aleae** (1663 veröffentlicht).

- GEROLAMO CARDANO (1501-1576) schrieb 1524 das **erste Buch** über Wahrscheinlichkeitsrechnung: **De Ludo Aleae** (1663 veröffentlicht).
- CHRISTIAAN HUYGENS (1629-1695) veröffentlichte im Jahre 1657 das **erste Buch** über Wahrscheinlichkeitsrechnung, **De Rationiciis in Aleae Ludo**. Er kannte zwar die Ergebnisse von Pascal und Fermat, aber nicht ihren Lösungsweg. Seine Überlegungen zu den Themen "Gerechtigkeit" und "Erwartungswert" gingen weit über jene von Cardano, Pascal und Fermat hinaus. Insbesondere erhielt er eine neue Lösung des de Méré'schen Aufteilungsproblems.

- GEROLAMO CARDANO (1501-1576) schrieb 1524 das **erste Buch** über Wahrscheinlichkeitsrechnung: **De Ludo Aleae** (1663 veröffentlicht).
- CHRISTIAAN HUYGENS (1629-1695) veröffentlichte im Jahre 1657 das **erste Buch** über Wahrscheinlichkeitsrechnung, **De Rationiciis in Aleae Ludo**. Er kannte zwar die Ergebnisse von Pascal und Fermat, aber nicht ihren Lösungsweg. Seine Überlegungen zu den Themen "Gerechtigkeit" und "Erwartungswert" gingen weit über jene von Cardano, Pascal und Fermat hinaus. Insbesondere erhielt er eine neue Lösung des de Méré'schen Aufteilungsproblems.
- JOHAN DE WIT (1625-1672) berechnet **Mortalitätsmodelle** und Witwenrenten auf Basis von Huygens' Überlegungen.

- GEROLAMO CARDANO (1501-1576) schrieb 1524 das **erste Buch** über Wahrscheinlichkeitsrechnung: **De Ludo Aleae** (1663 veröffentlicht).
- CHRISTIAAN HUYGENS (1629-1695) veröffentlichte im Jahre 1657 das **erste Buch** über Wahrscheinlichkeitsrechnung, **De Rationiciis in Aleae Ludo**. Er kannte zwar die Ergebnisse von Pascal und Fermat, aber nicht ihren Lösungsweg. Seine Überlegungen zu den Themen "Gerechtigkeit" und "Erwartungswert" gingen weit über jene von Cardano, Pascal und Fermat hinaus. Insbesondere erhielt er eine neue Lösung des de Méré'schen Aufteilungsproblems.
- JOHAN DE WIT (1625-1672) berechnet **Mortalitätsmodelle** und Witwenrenten auf Basis von Huygens' Überlegungen.
- JAKOB BERNOULLI (1655-1705) benutzt in **Ars Conjectandi** (1713) **Kombinatorik**, betrachtet **Folgen von Zufallsgrößen** und beweist ein **Gesetz der Großen Zahlen**.

- GEROLAMO CARDANO (1501-1576) schrieb 1524 das **erste Buch** über Wahrscheinlichkeitsrechnung: **De Ludo Aleae** (1663 veröffentlicht).
- CHRISTIAAN HUYGENS (1629-1695) veröffentlichte im Jahre 1657 das **erste Buch** über Wahrscheinlichkeitsrechnung, **De Rationiciis in Aleae Ludo**. Er kannte zwar die Ergebnisse von Pascal und Fermat, aber nicht ihren Lösungsweg. Seine Überlegungen zu den Themen "Gerechtigkeit" und "Erwartungswert" gingen weit über jene von Cardano, Pascal und Fermat hinaus. Insbesondere erhielt er eine neue Lösung des de Méré'schen Aufteilungsproblems.
- JOHAN DE WIT (1625-1672) berechnet **Mortalitätsmodelle** und Witwenrenten auf Basis von Huygens' Überlegungen.
- JAKOB BERNOULLI (1655-1705) benutzt in **Ars Conjectandi** (1713) **Kombinatorik**, betrachtet **Folgen von Zufallsgrößen** und beweist ein **Gesetz der Großen Zahlen**.
- ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754) beweist in **The Doctrine of Chances** (1718) einen **Zentralen Grenzwertsatz** und führt die **Glockenkurve** ein.

- GEROLAMO CARDANO (1501-1576) schrieb 1524 das **erste Buch** über Wahrscheinlichkeitsrechnung: **De Ludo Aleae** (1663 veröffentlicht).
- CHRISTIAAN HUYGENS (1629-1695) veröffentlichte im Jahre 1657 das **erste Buch** über Wahrscheinlichkeitsrechnung, **De Rationiis in Aleae Ludo**. Er kannte zwar die Ergebnisse von Pascal und Fermat, aber nicht ihren Lösungsweg. Seine Überlegungen zu den Themen "Gerechtigkeit" und "Erwartungswert" gingen weit über jene von Cardano, Pascal und Fermat hinaus. Insbesondere erhielt er eine neue Lösung des de Méré'schen Aufteilungsproblems.
- JOHAN DE WIT (1625-1672) berechnet **Mortalitätsmodelle** und Witwenrenten auf Basis von Huygens' Überlegungen.
- JAKOB BERNOULLI (1655-1705) benutzt in **Ars Conjectandi** (1713) **Kombinatorik**, betrachtet **Folgen von Zufallsgrößen** und beweist ein **Gesetz der Großen Zahlen**.
- ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754) beweist in **The Doctrine of Chances** (1718) einen **Zentralen Grenzwertsatz** und führt die **Glockenkurve** ein.
- THOMAS BAYES (1702-1761) führt **bedingte Wahrscheinlichkeiten** ein und begründet die **Statistik**.

- Wenn die Pfeilspitze beim Dartspiel jeden einzelnen Punkt mit **Wahrscheinlichkeit Null** trifft, wie kann es sein, dass sie die kleine Kreisscheibe in der Mitte mit **positiver Wahrscheinlichkeit** trifft?
- Kann man die Wahrscheinlichkeit **jeder** Menge messen, auch wenn sie ganz abstrus aussieht?
- Was sind denn nun die **Rechenregeln**, auf denen man eine Theorie aufbauen kann?

- Wenn die Pfeilspitze beim Dartspiel jeden einzelnen Punkt mit **Wahrscheinlichkeit Null** trifft, wie kann es sein, dass sie die kleine Kreisscheibe in der Mitte mit **positiver Wahrscheinlichkeit** trifft?
- Kann man die Wahrscheinlichkeit **jeder** Menge messen, auch wenn sie ganz abstrus aussieht?
- Was sind denn nun die **Rechenregeln**, auf denen man eine Theorie aufbauen kann?

Die Durchbrüche um 1900

- **Mengenlehre** (GEORG CANTOR 1895)
- das **6. Problem** von DAVID HILBERT 1900 (Suche nach Fundamenten einer w'theoretischen Beschreibung der Physik)
- **Maßtheorie** (EMILE BOREL 1901)
- **Integrationstheorie** (HENRI LEBESGUE 1902)
- Konstruktion der **Brown'schen Bewegung** als stochastischer Prozess (NORBERT WIENER 1922)

Die Kolmogorov'schen Axiome (1933). Moderne Formulierung

Sei Ω eine Menge (die Elemente heißen *Elementarereignisse*), \mathcal{F} ein geeignetes Mengensystem von Teilmengen von Ω (diese Mengen heißen *Ereignisse*) und $\mathbb{P}: \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ eine Abbildung (genannt *Wahrscheinlichkeitsmaß*), die die folgenden Rechenregeln erfüllt:

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1, \quad \mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A) \quad \text{und} \quad \mathbb{P}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(A_n),$$

dann heißt $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein *Wahrscheinlichkeitsraum*.

Die Elemente aus Ω und die aus \mathcal{F} nennt man auch *zufällig*.

Das sind die **Fundamente der Wahrscheinlichkeitstheorie**,
auf denen heute aufgebaut wird!

Ein Paradebeispiel eines **stochastischen Prozesses** ist die **Brown'sche Bewegung**.

Sie **verbindet die Wissenschaften** (Biologie, Physik, Mathematik, Wirtschaft) wie kein zweites Objekt.

Die Frage, ob sie wirklich **zufällig** ist und wie sie zu erklären ist, wurde erst nach einiger Zeit durch einen **statistischen Erklärungsansatz** beantwortet.

Seit einiger Zeit ist sie eines der besten Pferde im Stall der Wahrscheinlichkeitstheorie, denn sie hat extrem reichhaltige Eigenschaften und vielfältige Verbindungen.

1827 beobachtete der schottische Botaniker ROBERT BROWN unter dem Mikroskop, wie Pflanzenpollen sich in einem Wassertropfen **unregelmäßig hin- und her**bewegten.



Browns Originalmikroskop



ROBERT BROWN (1773-1858)

Was sah Robert Brown?

(mit bestem Dank an Michael Fowler, University of Virginia)

1827 beobachtete der schottische Botaniker ROBERT BROWN unter dem Mikroskop, wie Pflanzenpollen sich in einem Wassertropfen **unregelmäßig hin- und her**bewegten.



Browns Originalmikroskop



ROBERT BROWN (1773-1858)

Was sah Robert Brown?

(mit bestem Dank an Michael Fowler, University of Virginia)

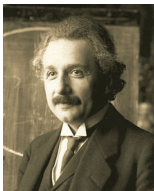
Die Forschung der folgenden Jahrzehnte zeigte einige Besonderheiten: Diese Bewegung ist

- **extrem allgemein** und wird in nahezu jeder Flüssigkeit beobachtet (wenn die Partikel genügend klein sind)
- **zeitlich unveränderlich**; sie setzt sich unbegrenzt fort und wird nicht schwächer
- **unabhängig von äußeren Umständen** wie Licht, Farbeinstrahlung, Schütteln
- unter Einfluss von **Wärme beschleunigt**.

Was ist das und wie geht man damit um?

In seinem Sternjahr 1905 erklärte ALBERT EINSTEIN den Effekt mit Hilfe der **Molekularstruktur des Wassers** unter Einfluss **thermischer Kräfte**.

Deshalb veröffentlichte MARIAN SMOLUCHOWSKI 1906 seine (älteren) Überlegungen zum Brown'schen Prozess mit einer ähnlichen Theorie.



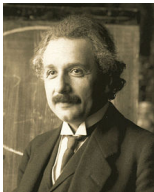
ALBERT EINSTEIN (1879-1955) um 1921



MARIAN SMOLUCHOWSKI (1872-1917)

In seinem Sternjahr 1905 erklärte ALBERT EINSTEIN den Effekt mit Hilfe der **Molekularstruktur des Wassers** unter Einfluss **thermischer Kräfte**.

Deshalb veröffentlichte MARIAN SMOLUCHOWSKI 1906 seine (älteren) Überlegungen zum Brown'schen Prozess mit einer ähnlichen Theorie.



ALBERT EINSTEIN (1879-1955) um 1921



MARIAN SMOLUCHOWSKI (1872-1917)

Beide bestätigten damit theoretisch, dass man **Flüssigkeiten als Moleküle** auffassen sollte, was 1863 experimentell von CHRISTIAN WIENER gezeigt worden war. Sie wendeten kinetische Theorien an, berechneten Größenordnungen und bestätigten eine mögliche Übereinstimmung mit Browns Beobachtung.

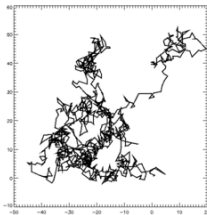
Der Pollen erhält so viele kleine Stöße von vielen kleinen Teilchen, dass man den Gesamteffekt der Ablenkung **statistisch erfassen** muss.

Die **Aufenthaltswahrscheinlichkeitsdichte** $p_t(x)$ des Pollens zum Zeitpunkt t am Ort x sollte der **Wärmeleitungsgleichung** genügen:

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(x) = D \Delta p_t(x),$$

wobei D eine Materialkonstante ist und $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ der **Laplace-Operator**.

Der Pfad einer zweidimensionalen
Brown'schen Bewegung



5. *Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen;*
von A. Einstein.

In dieser Arbeit soll gezeigt werden, daß nach der molekularkinetischen Theorie der Wärme in Flüssigkeiten suspendierte Körper von mikroskopisch sichtbarer Größe infolge der Molekularbewegung der Wärme Bewegungen von solcher Größe ausführen müssen, daß diese Bewegungen leicht mit dem Mikroskop nachgewiesen werden können. Es ist möglich, daß die hier zu behandelnden Bewegungen mit der sogenannten „Brownschen Molekularbewegung“ identisch sind; die mir erreichbaren Angaben über letztere sind jedoch so ungenau, daß ich mir hierüber kein Urteil bilden konnte.

Wenn sich die hier zu behandelnde Bewegung samt den für sie zu erwartenden Gesetzmäßigkeiten wirklich beobachten läßt, so ist die klassische Thermodynamik schon für mikroskopisch unterscheidbare Räume nicht mehr als genau gültig anzusehen und es ist dann eine exakte Bestimmung der wahren Atomgröße möglich. Erweise sich umgekehrt die Voraussage dieser Bewegung als unzutreffend, so wäre damit ein schwerwiegendes Argument gegen die molekularkinetische Auffassung der Wärme gegeben.

§ 1. *Über den suspendierten Teilchen zuzuschreibenden osmotischen Druck.*

Im Teilvolumen V^* einer Flüssigkeit vom Gesamtvolumen V seien x -Gramm-Moleküle eines Nichtelektrolyten gelöst. Ist das Volumen V^* durch eine für das Lösungsmittel, nicht aber für die gelöste Substanz durchlässige Wand vom reinen Lösungs-

4. *Zur kinetischen Theorie der Brownschen Molekularbewegung und der Suspensionen;*
von M. von Smoluchowski.

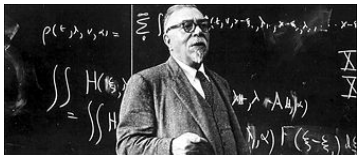
[Bearbeitet nach einer am 9. Juli 1906 der Krakauer Akademie vorgelegten und demnächst in dem Bullett. Int. Crac. erscheinenden Abhandlung.]

§ 1. Die viel umstrittene Frage nach dem Wesen der von dem Botaniker Robert Brown 1827 entdeckten Bewegungserscheinungen, welche an mikroskopisch kleinen, in Flüssigkeiten suspendierten Teilchen auftreten, ist neuerdings durch zwei theoretische Arbeiten von Einstein¹⁾ wieder in Anregung gebracht worden. Die Ergebnisse derselben stimmen nun vollkommen mit einigen Resultaten überein, welche ich vor mehreren Jahren in Verfolgung eines ganz verschiedenen Gedankenganges erhalten hatte, und welche ich seither als gewichtiges Argument für die kinetische Natur dieses Phänomens ansehe. Obwohl es mir bisher nicht möglich war, eine experimentelle Prüfung der Konsequenzen dieser Anschauungsweise vorzunehmen, was ich ursprünglich zu tun beabsichtigte, habe ich mich doch entschlossen, jene Überlegungen nunmehr zu veröffentlichen, da ich damit zur Klärung der Ansichten über diesen interessanten Gegenstand beizutragen hoffe, insbesondere da mir meine Methode direkter, einfacher und darum vielleicht auch überzeugender zu sein scheint als jene Einsteins.

Dem Mangel einer direkten experimentellen Verifikation suche ich teilweise wenigstens durch eine zusammenfassende Übersicht der bisher bekannten Versuchsergebnisse abzuhelfen, welche im Verein mit einer kritischen Analyse der verschiedenen Erklärungsversuche deutliche Hinweise darauf zu geben scheint, daß das Brownsche Phänomen in der Tat mit den theoretisch vorauszuherrschenden Molekularbewegungen identisch ist. Den Schluß bilden einige Bemerkungen über die Suspensionen

1) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17. p. 549. 1905; 19. p. 871. 1906.

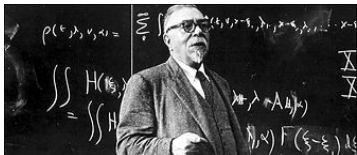
Eine mathematische Konstruktion auf Basis von EMILE BORELS [Maßtheorie](#) gelang erst 1922 NORBERT WIENER. Sein Beweis war extrem lang und kompliziert.



NORBERT WIENER (1894-1964)

Wieners Arbeiten markieren den Beginn der mathematischen [Theorie der Stochastischen Prozesse](#). Ihm zu Ehren sprechen wir auch vom [Wiener-Prozess](#).

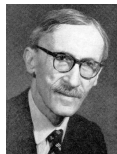
Eine mathematische Konstruktion auf Basis von EMILE BORELS [Maßtheorie](#) gelang erst 1922 NORBERT WIENER. Sein Beweis war extrem lang und kompliziert.



NORBERT WIENER (1894-1964)

Wieners Arbeiten markieren den Beginn der mathematischen [Theorie der Stochastischen Prozesse](#). Ihm zu Ehren sprechen wir auch vom [Wiener-Prozess](#).

Anhand des Wiener-Prozesses entwickelte PAUL LÉVY in den 1930er Jahren die Theorie und baute sie aus. Er bewies viele interessante Eigenschaften des Wiener-Prozesses.



PAUL LÉVY (1886-1971)

Die Theorie der **stochastischen Differentialgleichungen**, in der der Wiener-Prozess die fundamentale Rolle spielt, wurde in den 1940er Jahren von ITŌ KIYOSHI begründet.



ITŌ KIYOSHI (1915 – 2008)

Die Theorie der **stochastischen Differentialgleichungen**, in der der Wiener-Prozess die fundamentale Rolle spielt, wurde in den 1940er Jahren von ITŌ KIYOSHI begründet.



ITŌ KIYOSHI (1915 – 2008)



LOUIS BACHELIER (1870-1946)

Eine stochastische **Finanzmathematik**, initiiert von LOUIS BACHELIER schon um 1900, bekommt große Akzeptanz durch die Idee der **geometrischen Brown'schen Bewegung** durch FISCHER SHEFFEY BLACK and MYRON SAMUEL SCHOLES (1973; Wirtschafts-Nobelpreis 1997).

Mirakulöse Eigenschaften der zweidimensionalen Brown'schen Bewegung sind:

- Ihre Pfade sind unendlich lang und nirgends differenzierbar.
- Sie trifft jede Kugel unendlich oft.
- Sie windet sich unendlich oft um jeden Punkt (außer ihren Startpunkt).
- Die Menge der Punkte der Ebene, die sie unendlich oft trifft, ist zweidimensional.

Mirakulöse Eigenschaften der zweidimensionalen Brown'schen Bewegung sind:

- Ihre Pfade sind unendlich lang und nirgends differenzierbar.
- Sie trifft jede Kugel unendlich oft.
- Sie windet sich unendlich oft um jeden Punkt (außer ihren Startpunkt).
- Die Menge der Punkte der Ebene, die sie unendlich oft trifft, ist zweidimensional.

Ihre große Bedeutung rührt her von

- ihren vielfältigen Anwendungen in Finanzmathematik, Physik, Wirtschaft, Chemie und Biologie,
- ihrer verbindende Rolle zwischen mehreren mathematischen Zweigen (Wahrscheinlichkeitstheorie, partielle Differentialgleichungen, Operatortheorie, Potentialtheorie, ...) sowie zwischen der Mathematik und der Physik.

Trotz/wegen der riesigen Forschungsaktivität gibt es noch etliche **offene Fragen** über die Brown'sche Bewegung wie etwa:

- Hat Brown eine Brown'sche Bewegung gesehen?
- Kann man mit Hilfe abstoßender Brown'scher Bewegungen **Kondensationseffekte** verstehen, etwa die berühmte BOSE-EINSTEIN-Kondensation?
- Wie verhält sich ein **Brown'sches Polymer**?

Die Brown'sche Bewegung wird uns noch lange beschäftigen!