Weierstraß-Institut für
Angewandte Analysis und Stochastik

Leibniz Gemeinschaft

Streifzüge durch die Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie

Wolfgang König

Inhalt

1 Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie als mathematische Disziplin

- Warum eine Wahrscheinlichkeitstheorie?
- Paradoxa und Probleme
- Meilensteine 1500 – 1930

Warum eine Wahrscheinlichkeitstheorie?

- Philosophische Fragen:
  - Was ist Zufall?
  - Was ist Wahrscheinlichkeit?
  - Ist alles um uns herum deterministisch oder alles zufällig?

Warum eine Wahrscheinlichkeitstheorie?

- Philosophische Fragen:
  - Was ist Zufall?
  - Was ist Wahrscheinlichkeit?
  - Ist alles um uns herum deterministisch oder alles zufällig?

- Anwendungen im Glücksspiel, bei Versicherungen und Finanzkursen, später auch in der Physik, beim Wetter und in vielen anderen Gebieten

Warum eine Wahrscheinlichkeitstheorie?

- Philosophische Fragen:
  - Was ist Zufall?
  - Was ist Wahrscheinlichkeit?
  - Ist alles um uns herum deterministisch oder alles zufällig?

- Anwendungen im Glücksspiel, bei Versicherungen und Finanzkursen, später auch in der Physik, beim Wetter und in vielen anderen Gebieten

- Anwendung(sversuche) im Rechtswesen

Warum eine Wahrscheinlichkeitstheorie?

- Philosophische Fragen:
  - Was ist Zufall?
  - Was ist Wahrscheinlichkeit?
  - Ist alles um uns herum deterministisch oder alles zufällig?

- Anwendungen im Glücksspiel, bei Versicherungen und Finanzkursen, später auch in der Physik, beim Wetter und in vielen anderen Gebieten

- Anwendung(sversuche) im Rechtswesen

- Suche nach Systematik und Gesetzmäßigkeiten

Frequentistische Definition

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (= des Ausgangs eines Experimentes, das man oft unter gleichen Bedingungen wiederholen kann) ist der Grenzwert der relativen Häufigkeit des Eintretens dieses Ereignisses bei vielen Wiederholungen.

Frequentistische Definition

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (= des Ausgangs eines Experimentes, das man oft unter gleichen Bedingungen wiederholen kann) ist der Grenzwert der relativen Häufigkeit des Eintretens dieses Ereignisses bei vielen Wiederholungen.

- Wahrscheinlichkeit als physikalische Größe, die man beliebig genau messen kann und Messfehlern unterliegt
- stark von Glücksspielen und physikalischer Intuition beeinflusst
- versagt bei Experimenten, die man nicht oft wiederholen kann

Was ist Wahrscheinlichkeit?

Frequentistische Definition

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (= des Ausgangs eines Experimentes, das man oft unter gleichen Bedingungen wiederholen kann) ist der Grenzwert der relativen Häufigkeit des Eintretens dieses Ereignisses bei vielen Wiederholungen.

- Wahrscheinlichkeit als physikalische Größe, die man beliebig genau messen kann und Messfehlern unterliegt
- stark von Glücksspielen und physikalischer Intuition beeinflusst
- versagt bei Experimenten, die man nicht oft wiederholen kann

BAYES'sche Definition

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist ein Maß dafür, wie stark man von dem Eintreten des Ereignisses überzeugt ist.

Was ist Wahrscheinlichkeit?

Frequentistische Definition

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses (= des Ausgangs eines Experimentes, das man oft unter gleichen Bedingungen wiederholen kann) ist der Grenzwert der relativen Häufigkeit des Eintretens dieses Ereignisses bei vielen Wiederholungen.

- Wahrscheinlichkeit als physikalische Größe, die man beliebig genau messen kann und Messfehlern unterliegt
- stark von Glücksspielen und physikalischer Intuition beeinflusst
- versagt bei Experimenten, die man nicht oft wiederholen kann

BAYES'sche Definition

Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignisses ist ein Maß dafür, wie stark man von dem Eintreten des Ereignisses überzeugt ist.

- Sehr pragmatisch, aber induziert unerwünschte subjektive Kriterien. (Wieviel wärst Du bereit zu setzen?)
- Es spielt keine Rolle, ob wirklich Zufall im Spiel ist.

Schwierigkeiten

Die Entwicklung der W'Theorie als Wissenschaft hatte Gegenwind

1. von der Kirche:
   - Glückspiel unerwünscht
   - Gottes Entscheidungen ergründen zu versuchen, ist nahe der Blasphemie.

Schwierigkeiten

Die Entwicklung der W'Theorie als Wissenschaft hatte Gegenwind

1. von der Kirche:
   - Glückspiel unerwünscht
   - Gottes Entscheidungen ergründen zu versuchen, ist nahe der Blasphemie.
2. von manchen Naturwissenschaftlern der Aufklärung
   - Zufall gibt es nicht, man muss nur genau genug messen
   - Daher gibt es keine seriöse W'Theorie.

Schwierigkeiten

Die Entwicklung der W'Theorie als Wissenschaft hatte Gegenwind

1. von der Kirche:
   - Glückspiel unerwünscht
   - Gottes Entscheidungen ergründen zu versuchen, ist nahe der Blasphemie.
2. von manchen Naturwissenschaftlern der Aufklärung
   - Zufall gibt es nicht, man muss nur genau genug messen
   - Daher gibt es keine seriöse W'Theorie.
3. von manchen Mathematikern
   - große Diskrepanz zwischen unsicheren Ereignissen und der Mathematik als Lehre der gesicherten Erkenntnis.

Schwierigkeiten

Die Entwicklung der W'Theorie als Wissenschaft hatte Gegenwind

1. von der Kirche:
   - Glückspiel unerwünscht
   - Gottes Entscheidungen ergründen zu versuchen, ist nahe der Blasphemie.
2. von manchen Naturwissenschaftlern der Aufklärung
   - Zufall gibt es nicht, man muss nur genau genug messen
   - Daher gibt es keine seriöse W'Theorie.
3. von manchen Mathematikern
   - große Diskrepanz zwischen unsicheren Ereignissen und der Mathematik als Lehre der gesicherten Erkenntnis.
4. von der Existenz gewisser Paradoxa und logischen Problemen wie etwa
   - dem Gefangenenparadoxon,
   - der Existenz von Ereignissen mit Wahrscheinlichkeit Null,
   - Wahrscheinlichkeiten auf Kugeloberflächen oder anderen Kontinuen.

Das Problem

Zwei von drei Gefangenen A, B und C sollen hingerichtet werden, aber sie wissen nicht, welche. Jeder hat also die Wahrscheinlichkeit $1/3$ zu überleben. A bittet den Wärter W, ihm einen von ihm verschiedenen Todeskandidaten zu benennen. W antwortet, dass B hingerichtet werden wird. Nun freut sich A, dass sich seine Überlebenschancen auf 1/2 erhöht haben, denn nur noch C und er kommen in Frage, beide mit gleicher Chance.
Hat er Recht?

Das Problem

Zwei von drei Gefangenen A, B und C sollen hingerichtet werden, aber sie wissen nicht, welche. Jeder hat also die Wahrscheinlichkeit $1/3$ zu überleben. A bittet den Wärter W, ihm einen von ihm verschiedenen Todeskandidaten zu benennen. W antwortet, dass B hingerichtet werden wird. Nun freut sich A, dass sich seine Überlebenschancen auf 1/2 erhöht haben, denn nur noch C und er kommen in Frage, beide mit gleicher Chance.
Hat er Recht?

- Wichtig: Wir gehen davon aus, dass, falls B und C hingerichtet werden, der Wärter beide mit gleicher Wahrscheinlichkeit nennt.
- Dann lautet die Antwort Nein, denn Ws Information enthält keine wesentliche neue Information. Daher ist die Überlebenswahrscheinlichkeit von A gleich

$$\mathbb{P}(A \text{ überlebt} \mid W \text{ nennt B}) = \frac{\mathbb{P}(A \text{ überlebt}, W \text{ nennt B})}{\mathbb{P}(W \text{ nennt B})} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+0+\frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Das Gefangenenparadoxon

Das Problem

Zwei von drei Gefangenen A, B und C sollen hingerichtet werden, aber sie wissen nicht, welche. Jeder hat also die Wahrscheinlichkeit $1/3$ zu überleben. A bittet den Wärter W, ihm einen von ihm verschiedenen Todeskandidaten zu benennen. W antwortet, dass B hingerichtet werden wird. Nun freut sich A, dass sich seine Überlebenschancen auf 1/2 erhöht haben, denn nur noch C und er kommen in Frage, beide mit gleicher Chance.
Hat er Recht?

- Wichtig: Wir gehen davon aus, dass, falls B und C hingerichtet werden, der Wärter beide mit gleicher Wahrscheinlichkeit nennt.
- Dann lautet die Antwort Nein, denn Ws Information enthält keine wesentliche neue Information. Daher ist die Überlebenswahrscheinlichkeit von A gleich

$$\mathbb{P}(A \text{ überlebt} \mid W \text{ nennt B}) = \frac{\mathbb{P}(A \text{ überlebt}, W \text{ nennt B})}{\mathbb{P}(W \text{ nennt B})} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+0+\frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

- Falls W allerdings B mit Wahrscheinlichkeit p nennt, falls B und C hingerichtet werden, so ergibt sich die Überlebenswahrscheinlichkeit von A als $\frac{p}{1+p}$!

Der berühmte Briefwechsel Pascal - Fermat

BLAISE PASCAL beschrieb am 29. Juli 1654 in einem Brief an PIERRE DE FERMAT zwei Probleme, die ihm von seinem Freund ANTOINE GOMBAUD, CHEVALIER DE MÉRÉ zugetragen wurden. Pascal und Fermat lösten diese Probleme, indem sie fundamentale Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung zunächst klärten. Diese neuen Herangehensweisen wurden noch von Zeitgenossen als der Beginn einer wissenschaftlichen Wahrscheinlichkeitstheorie gefeiert, wenn diese neuen Ideen auch erst im Jahre 1679 veröffentlicht wurden.

BLAISE PASCAL (1623-1662)

PIERRE DE FERMAT (1607/8-1667)

Die de Méré'schen Probleme (1)

Das Aufteilungsparadoxon

Zwei Spieler spielen ein gerechtes Spiel auf sechs Gewinnsätze. Es muss beim Stande von fünf zu drei Gewinnsätzen abgebrochen werden. Wie teilt man den Siegespreis gerecht auf?

Die de Méré’schen Probleme (1)

Das Aufteilungsparadoxon

Zwei Spieler spielen ein gerechtes Spiel auf sechs Gewinnsätze. Es muss beim Stande von fünf zu drei Gewinnsätzen abgebrochen werden. Wie teilt man den Siegespreis gerecht auf?

- erste Publikation des Paradoxons 1494 in Venedig von Fra Luca Paccioli, falsche Lösung publiziert von Niccolo Tartaglia

Die de Méré’schen Probleme (1)

Das Aufteilungsparadoxon

Zwei Spieler spielen ein gerechtes Spiel auf sechs Gewinnsätze. Es muss beim Stande von fünf zu drei Gewinnsätzen abgebrochen werden. Wie teilt man den Siegespreis gerecht auf?

- erste Publikation des Paradoxons 1494 in Venedig von FRA LUCA PACCIOLI, falsche Lösung publiziert von NICCOLO TARTAGLIA
- Was heißt ’gerecht’? Nach den Gewinnchancen! (sonst Vorschläge: $5:3$, im Verhältnis der gewonnenen Runden, oder $2:1$.)

Die de Méré'schen Probleme (1)

Das Aufteilungsparadoxon

Zwei Spieler spielen ein gerechtes Spiel auf sechs Gewinnsätze. Es muss beim Stande von fünf zu drei Gewinnsätzen abgebrochen werden. Wie teilt man den Siegespreis gerecht auf?

- erste Publikation des Paradoxons 1494 in Venedig von Fra Luca Paccioli, falsche Lösung publiziert von Niccolo Tartaglia
- Was heißt 'gerecht'? Nach den Gewinnchancen! (sonst Vorschläge: $5:3$, im Verhältnis der gewonnenen Runden, oder $2:1$.)
- richtige Lösung: $7:1$, denn in sieben von acht möglichen fiktiven Fortsetzungen gewinnt der Führende.

Das Würfelproblem

Die Wahrscheinlichkeit, in vier Versuchen mindestens eine Sechs zu werfen, beträgt mit $\frac{671}{1296}$ *etwas mehr als 50 Prozent. Hingegen beträgt beim 24maligen Versuch, mit zwei Würfeln eine Doppelsechs zu werfen (jeder Versuch hat die Gewinnchance* $\frac{1}{36}$*), die Gewinnchance knapp unter 50 Prozent.*
Es gilt also **nicht** *die Regel, dass das Produkt aus Anzahl der Wiederholungen und der Erfolgswahrscheinlichkeit konstant ist.*

Die de Méré'schen Probleme (2)

Das Würfelproblem

Die Wahrscheinlichkeit, in vier Versuchen mindestens eine Sechs zu werfen, beträgt mit $\frac{671}{1296}$ *etwas mehr als 50 Prozent. Hingegen beträgt beim 24maligen Versuch, mit zwei Würfeln eine Doppelsechs zu werfen (jeder Versuch hat die Gewinnchance* $\frac{1}{36}$*), die Gewinnchance knapp unter 50 Prozent.*
Es gilt also **nicht** *die Regel, dass das Produkt aus Anzahl der Wiederholungen und der Erfolgswahrscheinlichkeit konstant ist.*

- verwirrend wegen ungenügender Unterscheidung zwischen Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerten.

Die de Méré'schen Probleme (2)

Das Würfelproblem

Die Wahrscheinlichkeit, in vier Versuchen mindestens eine Sechs zu werfen, beträgt mit $\frac{671}{1296}$ etwas mehr als 50 Prozent. Hingegen beträgt beim 24maligen Versuch, mit zwei Würfeln eine Doppelsechs zu werfen (jeder Versuch hat die Gewinnchance $\frac{1}{36}$), die Gewinnchance knapp unter 50 Prozent.
Es gilt also **nicht** *die Regel, dass das Produkt aus Anzahl der Wiederholungen und der Erfolgswahrscheinlichkeit konstant ist.*

- verwirrend wegen ungenügender Unterscheidung zwischen Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerten.
- Dass die Antworten $1-(5/6)^4 \approx 0,5177$ und $1-(35/36)^{24} \approx 0,4914$ sind, war Herrn de Méré klar. Er suchte nach einem Grund, warum die Regel nicht gelten solle. Mit Pascals Antwort war er nicht zufrieden.

Die de Méré'schen Probleme (2)

Das Würfelproblem

Die Wahrscheinlichkeit, in vier Versuchen mindestens eine Sechs zu werfen, beträgt mit $\frac{671}{1296}$ etwas mehr als 50 Prozent. Hingegen beträgt beim 24maligen Versuch, mit zwei Würfeln eine Doppelsechs zu werfen (jeder Versuch hat die Gewinnchance $\frac{1}{36}$), die Gewinnchance knapp unter 50 Prozent.
Es gilt also **nicht** *die Regel, dass das Produkt aus Anzahl der Wiederholungen und der Erfolgswahrscheinlichkeit konstant ist.*

- verwirrend wegen ungenügender Unterscheidung zwischen Wahrscheinlichkeiten und Erwartungswerten.
- Dass die Antworten $1-(5/6)^4 \approx 0,5177$ und $1-(35/36)^{24} \approx 0,4914$ sind, war Herrn de Méré klar. Er suchte nach einem Grund, warum die Regel nicht gelten solle. Mit Pascals Antwort war er nicht zufrieden.
- Abraham de Moivre zeigte 1718, dass die Regel nur in einem geeigneten asymptotischen Sinne stimmt.

Weitere Meilensteine (1)

- GEROLAMO CARDANO (1501-1576) schrieb 1524 das erste Buch über Wahrscheinlichkeitsrechnung: De Ludo Aleae (1663 veröffentlicht).

Weitere Meilensteine (1)

- Gerolamo Cardano (1501-1576) schrieb 1524 das erste Buch über Wahrscheinlichkeitsrechnung: De Ludo Aleae (1663 veröffentlicht).

- Christiaan Huygens (1629-1695) veröffentlicht 1657 die erste Monographie über Wahrscheinlichkeitsrechnung, De Rationiciis in Aleae Ludo. Er kannte zwar die Ergebnisse von Pascal und Fermat, aber nicht ihren Lösungsweg.

Weitere Meilensteine (1)

- Gerolamo Cardano (1501-1576) schrieb 1524 das erste Buch über Wahrscheinlichkeitsrechnung: De Ludo Aleae (1663 veröffentlicht).

- Christiaan Huygens (1629-1695) veröffentlicht 1657 die erste Monographie über Wahrscheinlichkeitsrechnung, De Rationiciis in Aleae Ludo. Er kannte zwar die Ergebnisse von Pascal und Fermat, aber nicht ihren Lösungsweg.

- Auf Basis von Huygens' Lehre vom Erwartungswert bewies John Tillotson (Erzbischof von Canterbury), dass sich der Glaube an Gott lohne. Er benutzt, dass das Ereignis, dass Gott existiert, positive Wahrscheinlichkeit hat.

Weitere Meilensteine (1)

- GEROLAMO CARDANO (1501-1576) schrieb 1524 das erste Buch über Wahrscheinlichkeitsrechnung: De Ludo Aleae (1663 veröffentlicht).

- CHRISTIAAN HUYGENS (1629-1695) veröffentlicht 1657 die erste Monographie über Wahrscheinlichkeitsrechnung, De Rationiciis in Aleae Ludo. Er kannte zwar die Ergebnisse von Pascal und Fermat, aber nicht ihren Lösungsweg.

- Auf Basis von Huygens' Lehre vom Erwartungswert bewies JOHN TILLOTSON (Erzbischof von Canterbury), dass sich der Glaube an Gott lohne. Er benutzt, dass das Ereignis, dass Gott existiert, positive Wahrscheinlichkeit hat.

- JOHAN DE WIT (1625-1672) berechnet Mortalitätsmodelle und Witwenrenten auf Basis von Huygens' Überlegungen

Weitere Meilensteine (1)

- GEROLAMO CARDANO (1501-1576) schrieb 1524 das erste Buch über Wahrscheinlichkeitsrechnung: De Ludo Aleae (1663 veröffentlicht).

- CHRISTIAAN HUYGENS (1629-1695) veröffentlicht 1657 die erste Monographie über Wahrscheinlichkeitsrechnung, De Rationiciis in Aleae Ludo. Er kannte zwar die Ergebnisse von Pascal und Fermat, aber nicht ihren Lösungsweg.

- Auf Basis von Huygens' Lehre vom Erwartungswert bewies JOHN TILLOTSON (Erzbischof von Canterbury), dass sich der Glaube an Gott lohne. Er benutzt, dass das Ereignis, dass Gott existiert, positive Wahrscheinlichkeit hat.

- JOHAN DE WIT (1625-1672) berechnet Mortalitätsmodelle und Witwenrenten auf Basis von Huygens' Überlegungen

- JAKOB BERNOULLI (1655-1705) benutzt in Ars Conjectandi (1713) Kombinatorik, betrachtet Folgen von Zufallsgrößen und beweist ein Gesetz der Großen Zahlen.

Weitere Meilensteine (2)

- ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754) beweist in The Doctrine of Chances (1718) einen Zentralen Grenzwertsatz und führt die Glockenkurve ein.

Weitere Meilensteine (2)

- Abraham de Moivre (1667-1754) beweist in The Doctrine of Chances (1718) einen Zentralen Grenzwertsatz und führt die Glockenkurve ein.

- Thomas Bayes (1702-1761) führt bedingte Wahrscheinlichkeiten ein und begründet die Statistik.

Weitere Meilensteine (2)

- ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754) beweist in The Doctrine of Chances (1718) einen Zentralen Grenzwertsatz und führt die Glockenkurve ein.
- THOMAS BAYES (1702-1761) führt bedingte Wahrscheinlichkeiten ein und begründet die Statistik.
- Verfeinerungen und philosophische Betrachtungen, aber Sackgasse bis etwa 1895.

Weitere Meilensteine (2)

- ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754) beweist in The Doctrine of Chances (1718) einen Zentralen Grenzwertsatz und führt die Glockenkurve ein.

- THOMAS BAYES (1702-1761) führt bedingte Wahrscheinlichkeiten ein und begründet die Statistik.

- Verfeinerungen und philosophische Betrachtungen, aber Sackgasse bis etwa 1895.

- Mathematische Durchbrüche: Mengenlehre (CANTOR 1895), HILBERT'sches 6. Problem, Maßtheorie (BOREL 1901), Integrationstheorie (LEBESGUE 1902).

Weitere Meilensteine (2)

- ABRAHAM DE MOIVRE (1667-1754) beweist in The Doctrine of Chances (1718) einen Zentralen Grenzwertsatz und führt die Glockenkurve ein.

- THOMAS BAYES (1702-1761) führt bedingte Wahrscheinlichkeiten ein und begründet die Statistik.

- Verfeinerungen und philosophische Betrachtungen, aber Sackgasse bis etwa 1895.

- Mathematische Durchbrüche: Mengenlehre (CANTOR 1895), HILBERT'sches 6. Problem, Maßtheorie (BOREL 1901), Integrationstheorie (LEBESGUE 1902).

- neuer Schwung in der maßtheoretischen W'Theorie: Konstruktion der Brown'schen Bewegung (WIENER 1923), abschließende Axiomatik der W'Theorie (KOLMOGOROV 1933) – Geburt der mathematischen W'Theorie.

2 Erfolgsgeschichte eines stochastischen Prozesses: Die Brown’sche Bewegung

- Robert Browns Entdeckung
- Frühe Finanzmathematik
- Physiker greifen ein
- Theorie der Stochastischen Prozesse
- Mathematische Beschreibung

Robert Browns Entdeckung

1827 beobachtete der schottische Botaniker ROBERT BROWN unter dem Mikroskop, wie Pflanzenpollen sich in einem Wassertropfen unregelmäßig hin- und herbewegten.

Browns Originalmikroskop

ROBERT BROWN (1773-1858)

Robert Browns Entdeckung

1827 beobachtete der schottische Botaniker Robert Brown unter dem Mikroskop, wie Pflanzenpollen sich in einem Wassertropfen unregelmäßig hin- und herbewegten.

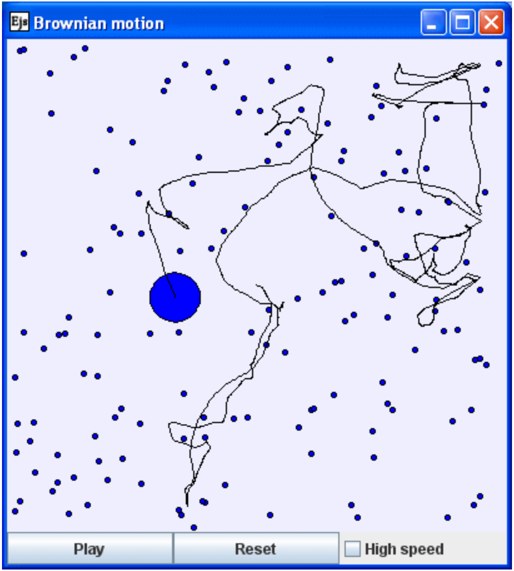
Browns Originalmikroskop

Robert Brown (1773-1858)

Weniger bekannt ist, dass bereits 1785 der Arzt und Botaniker Jan Ingenhousz eine solche Bewegung von Holzkohlestaub auf Alkohol beschrieb.

Jan Ingenhousz (1730-1799)

Was sah Brown?



Frühe Finanzmathematik

THORVALD NICOLAI THIELE
(1838-1910)

1880 beschrieb der Statistiker und Astronom THORVALD THIELE einen solchen Prozess auf mathematische Weise, als er Zeitreihen und die Verteilung von Residuen bei der Methode der kleinsten Quadrate studierte.

1880 beschrieb der Statistiker und Astronom THORVALD THIELE einen solchen Prozess auf mathematische Weise, als er Zeitreihen und die Verteilung von Residuen bei der Methode der kleinsten Quadrate studierte.

THORVALD NICOLAI THIELE (1838-1910)

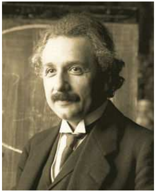
LOUIS BACHELIER (1870-1946) um 1890

1900 analysierte der Mathematiker LOUIS BACHELIER Kursbewegungen mit diesem Prozess. Sein Ansatz scheiterte letztendlich daran, dass der Prozess auch ins Negative gelangt, was für Aktienwerte unmöglich ist.

Die geometrische Brownsche Bewegung löst dies und gilt nun als Standard (BLACK-SCHOLES-Modell 1973).

Physiker greifen ein

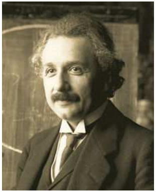
Der Durchbruch kam, als ALBERT EINSTEIN 1905 und unabhängig von ihm MARIAN SMOLUCHOWSKI 1906 diesen Prozess in seiner heutigen Gestalt definierten.



ALBERT EINSTEIN (1879-1955) um 1921

MARIAN SMOLUCHOWSKI (1872-1917)

Der Durchbruch kam, als ALBERT EINSTEIN 1905 und unabhängig von ihm MARIAN SMOLUCHOWSKI 1906 diesen Prozess in seiner heutigen Gestalt definierten.

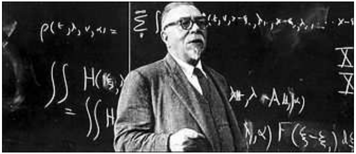


ALBERT EINSTEIN (1879-1955) um 1921

MARIAN SMOLUCHOWSKI (1872-1917)

Einstein zog dabei die molekulare Struktur des Wassers heran (damals äußerst kontrovers, heute aber unbestritten) und untermauerte dies mathematisch. In seinem Modell legen die Partikel in jeder Sekunde eine unendlich lange Strecke zurück. Dieser Ansatz bedeutete den Durchbruch sowohl für die molekulare Theorie als auch für den stochastischen Prozess.

Eine mathematische Konstruktion auf Basis der Maßtheorie, von LEBESGUE und BOREL neu entwickelt, gelang erst 1923 NORBERT WIENER. Sein Beweis war extrem lang und kompliziert.

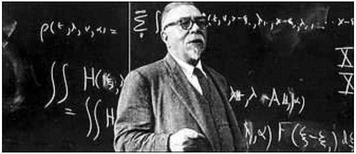


NORBERT WIENER (1894-1964)

Wieners Arbeiten markieren den Beginn der mathematischen Theorie der Stochastischen Prozesse. Ihm zu Ehren sprechen wir auch vom Wiener-Prozess.

Neue stochastische Theorie

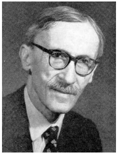
Eine mathematische Konstruktion auf Basis der Maßtheorie, von Lebesgue und Borel neu entwickelt, gelang erst 1923 Norbert Wiener. Sein Beweis war extrem lang und kompliziert.



Norbert Wiener (1894-1964)

Wieners Arbeiten markieren den Beginn der mathematischen Theorie der Stochastischen Prozesse. Ihm zu Ehren sprechen wir auch vom Wiener-Prozess.

Anhand des Wiener-Prozesses entwickelte Paul Lévy in den 1930er Jahren die Theorie und baute sie aus. Er bewies viele interessante Eigenschaften des Wiener-Prozesses.



Paul Lévy (1886-1971)

Die Theorie der stochastischen Differentialgleichungen, in der der Wiener-Prozess die fundamentale Rolle spielt, wurde in den 1940er Jahren von ITŌ KIYOSHI begründet.

ITŌ KIYOSHI (1915 – 2008)

Die Theorie der stochastischen Differentialgleichungen, in der der Wiener-Prozess die fundamentale Rolle spielt, wurde in den 1940er Jahren von Itō Kiyoshi begründet.

Itō Kiyoshi (1915 – 2008)

Danach wird die Publikationsflut über die Brown’sche Bewegung in Mathematik und Physik unüberschaubar.

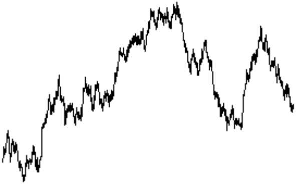
- Anzahl der google-Treffer für ‘Brownian motion’: 1.040.000.
- Anzahl der in MathSciNet registrierten Artikel mit ‘Brownian motion’ im Titel: 10725 (von insgesamt 2.336.256 Artikeln).
- Anzahl der in scopus registrierten Artikel mit ‘Brownian motion’ im Titel oder Abstract: 10.868.

Mathematische Beschreibung

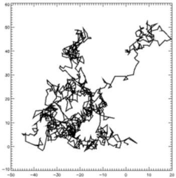
- Die Brown'sche Bewegung ist ein stetiger stochastischer Prozess mit
  - Werten in $\mathbb{R}^d$ und Start in 0,
  - Gauss-verteilten Marginalen und
  - unabhängigen Zuwächsen.

Mathematatische Beschreibung

- Die Brown'sche Bewegung ist ein stetiger stochastischer Prozess mit
  - Werten in $\mathbb{R}^d$ und Start in 0,
  - Gauss-verteilten Marginalen und
  - unabhängigen Zuwächsen.



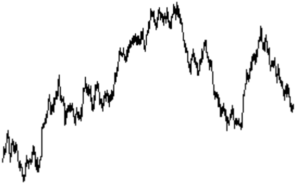
Eindimensionale Brown'sche Bewegung



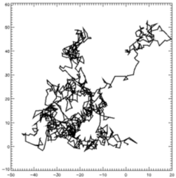
Zweidimensionale Brown'sche Bewegung

Mathematische Beschreibung

- Die Brown'sche Bewegung ist ein stetiger stochastischer Prozess mit
  - Werten in $\mathbb{R}^d$ und Start in 0,
  - Gauss-verteilten Marginalen und
  - unabhängigen Zuwächsen.



Eindimensionale Brown'sche Bewegung



Zweidimensionale Brown'sche Bewegung

- Mirakulöse Eigenschaften der zweidimensionalen Brown'schen Bewegung sind:
  - Ihre Pfade sind unendlich lang und nirgends differenzierbar.
  - Sie trifft jede Kugel unendlich oft.
  - Sie windet sich unendlich oft um jeden Punkt (außer ihren Startpunkt).
  - Die Menge der Punkte der Ebene, die sie unendlich oft trifft, ist zweidimensional.

Bedeutung

- Die Brown'sche Bewegung und ihre Varianten werden angewendet in Finanzmathematik, Physik, Wirtschaft, Chemie und Biologie.

Bedeutung

- Die Brown’sche Bewegung und ihre Varianten werden angewendet in Finanzmathematik, Physik, Wirtschaft, Chemie und Biologie.

- Die Brown’sche Bewegung spielt eine verbindende Rolle zwischen mehreren mathematischen Zweigen (Wahrscheinlichkeitstheorie, partielle Differentialgleichungen, Operatortheorie, Potentialtheorie, ...) sowie zwischen der Mathematik und der Physik.

Bedeutung

- Die Brown'sche Bewegung und ihre Varianten werden angewendet in Finanzmathematik, Physik, Wirtschaft, Chemie und Biologie.

- Die Brown'sche Bewegung spielt eine verbindende Rolle zwischen mehreren mathematischen Zweigen (Wahrscheinlichkeitstheorie, partielle Differentialgleichungen, Operatortheorie, Potentialtheorie, ...) sowie zwischen der Mathematik und der Physik.

- In der stochastischen Theorie ist die Brown'sche Bewegung jeweils der Prototyp eines
  - stetigen Markov-Prozesses,
  - Gauss'schen Prozesses,
  - selbstähnlichen Prozesses,
  - stetigen Martingals.

Bedeutung

- Die Brown'sche Bewegung und ihre Varianten werden angewendet in Finanzmathematik, Physik, Wirtschaft, Chemie und Biologie.

- Die Brown'sche Bewegung spielt eine verbindende Rolle zwischen mehreren mathematischen Zweigen (Wahrscheinlichkeitstheorie, partielle Differentialgleichungen, Operatortheorie, Potentialtheorie, ...) sowie zwischen der Mathematik und der Physik.

- In der stochastischen Theorie ist die Brown'sche Bewegung jeweils der Prototyp eines
  - stetigen Markov-Prozesses,
  - Gauss'schen Prozesses,
  - selbstähnlichen Prozesses,
  - stetigen Martingals.

- Die Brown'sche Bewegung ist der universelle Reskalierungsgrenzwert von Irrfahrten.

Offene Fragen

Trotz/wegen der riesigen Forschungaktivität gibt es noch etliche offene Fragen über die Brown'sche Bewegung wie etwa:

- Hat Brown eine Brown'sche Bewegung gesehen?
- Kann man mit Hilfe abstoßender Brown'scher Bewegungen Kondensationseffekte verstehen, etwa die berühmte BOSE-EINSTEIN-Kondensation?
- Wie verhält sich ein Brown'sches Polymer?

Ferner wird der Einsatz Brown'scher Modelle in allen Anwendungsgebieten erweitert und verfeinert.

Im Studium

Wer im Mathematikstudium an einer Berliner Universität die Brown'sche Bewegung näher kennenlernen möchte, belegt

- Analysis III im 3. Semester,
- Wahrscheinlichkeitstheorie 1 im 4. Semester,
- Wahrscheinlichkeitstheorie 2 im 5. Semester (Konstruktion mit Irrfahrten, erste Eigenschaften),
- Stochastische Prozesse im 6. Semester (weitere Eigenschaften, weitere Prozesse),
- Vertiefungen ab dem 5. Semester (Finanzmathematik, Probabilistische Potentialtheorie etc.).

Viel Spaß!