Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2008

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

# Wahrscheinlichkeitstheorie I: Übungsblatt 8

Abgabe am 10. bis 12. Juni 2008

AUFGABE 8.1 (3 Punkte) — Es seien $U$ eine auf $[0,1]$ gleichförmig verteilte Zufallsgröße und $F\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ eine Verteilungsfunktion. Wir definieren $F^{-1}\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ durch $F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R}\colon F(x) \geq u\}$. Zeigen Sie, dass $F^{-1}(U)$ eine Zufallsvariable mit Verteilungsfunktion $F$ ist.

DEFINITION. Die *Beta-Verteilung* auf dem Intervall $(0,1)$ mit Parametern $a, b \in (0,\infty)$ hat die Dichte

$$\beta_{a,b}(x) = \frac{x^{a-1}(1-x)^{b-1}}{B(a,b)}, \qquad x \in (0,1),$$

wobei $B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\,\mathrm{d}x$ die Beta-Funktion ist.

AUFGABE 8.2 (2 Punkte) — Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Beta-Verteilung.

*Hinweis:* Sie dürfen die Rekursionsformel $B(a+1,b) = \frac{a}{a+b}B(a,b)$ für alle $a,b \in (0,\infty)$ benutzen.

AUFGABE 8.3 (4 Punkte) — Es sei $X$ eine zum Parameter $\alpha > 0$ Poisson-verteilte Zufallsgröße. Zeigen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}_0$:

$$\mathbb{P}(X \leq n) = \frac{1}{n!}\int_\alpha^\infty x^n \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x.$$

AUFGABE 8.4 (4 Punkte) — Es seien Zufallsgrößen $X_1, \dots, X_n$ mit Dichten $f_1, \dots, f_n\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ gegeben (wir setzen nicht voraus, dass eine gemeinsame Dichte existiert). Zeigen Sie, dass $X_1, \dots, X_n$ genau dann unabhängig sind, wenn eine gemeinsame Dichte gegeben ist durch die Abbildung

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \prod_{i=1}^n f_i(x_i), \qquad x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}.$$

AUFGABE 8.5 (3 Punkte) — Im Punkt $(0,a)$ in der Ebene befindet sich eine Glühbirne, die gleichmäßig in alle Richtungen strahlt, die die $x$-Achse irgendwo treffen. Sei $X$ der Auftreffpunkt eines Lichtstrahls auf dieser Geraden. Zeigen Sie, dass $X$ die Dichte $f_a(x) = \frac{a}{\pi}\frac{1}{a^2+x^2}$, die sogenannte *Cauchy-Dichte*, besitzt.