Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2006/07

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Analysis A: Übungsblatt 8

Abgabe in den Übungen vom 7. bis 13. Dezember 2006

AUFGABE 8.1 (2 Punkte) — Bestimmen Sie die Konvergenzgeschwindigkeit im Leibniz'schen Konvergenzkriterium (siehe Aufgabe 7.2), indem Sie eine Abschätzung für die Restsumme $\sum_{n=k}^{\infty}(-1)^n a_n$ geben, wenn $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist.

AUFGABE 8.2 (3 Punkte) — Nach dem Leibniz'schen Kriterium (siehe Aufgabe 7.2) konvergiert die sogenannte *Leibniz'sche Reihe* $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$. Wie wir später sehen werden, hat sie den Wert $\pi/4$. Benutzen Sie dies, um zu zeigen, dass auch gilt:

$$\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(4n-3)(16n^2-1)}=\frac{\pi}{4}.$$

Hinweis: Zerlegen Sie den Bruch in eine Linearkombination der Einzelbrüche, und fassen Sie in der Leibniz'schen Reihe je zwei Summanden zusammen.

AUFGABE 8.3 (4 Punkte) — Es sei $\tau\colon\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ eine beschränkte Umordnung, also eine bijektive Abbildung, so dass es ein $C>0$ gibt mit $|\tau(n)-n|\leq C$ für jedes $n\in\mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass jede Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n$ (mit $a_n\in\mathbb{C}$ für jedes $n\in\mathbb{N}$) genau dann konvergiert, wenn $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_{\tau(n)}$ konvergiert.

AUFGABE 8.4 (4 Punkte) —

(i) Die Potenzreihe $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n x^n$ (mit $a_n\in\mathbb{C}$ für alle $n\in\mathbb{N}$) besitze den Konvergenzradius $\varrho\in(0,\infty)$. Zeigen Sie, dass dann die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ ebenfalls den Konvergenzradius ϱ besitzt.

(ii) Es sei $a_n\in[0,\infty)$ für jedes $n\in\mathbb{N}$, und die Reihe $\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n$ divergiere. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{n\in\mathbb{N}}a_n\Big(1-\frac{1}{k}\Big)^n=+\infty.$$

Hinweis: Eventuell ist die Bernoulli'sche Ungleichung hilfreich.

AUFGABE 8.5 (3 Punkte) — Sei A_n die Anzahl aller Paare $(k,l)\in\mathbb{N}^2$ mit $n=k^2+l^2$. Zeigen Sie, dass für jedes $x\in\mathbb{C}$ mit $|x|<1$ gilt:

$$\Big(\sum_{n\in\mathbb{N}}x^{n^2}\Big)^2=\sum_{n\in\mathbb{N}}A_n x^n.$$