Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2006/07

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Analysis A: Übungsblatt 5

Abgabe in den Übungen vom 16. bis 22. November 2006

AUFGABE 5.1 (4 Punkte) — Geben Sie explizit eine offene Überdeckung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ an, die keine endliche Teilüberdeckung besitzt (mit Beweis).

AUFGABE 5.2 (4 Punkte) —

(i) Zeigen Sie, dass $\sqrt{2}$ nicht in $\mathbb{Q}$ liegt, also irrational ist.

(ii) Zeigen Sie, dass zwischen je zwei reellen Zahlen mindestens eine irrationale Zahl liegt.

Hinweis zu (ii): Benutzen Sie, dass zwischen je zwei reellen Zahlen mindestens eine rationale Zahl liegt und dass $\sqrt{2}$ irrational ist.

AUFGABE 5.3 (4 Punkte) — DAS CANTOR'SCHE DISKONTINUUM. Es seien

$$C_0 = [0,1], \qquad C_1 = C_0 \setminus (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}), \qquad C_2 = C_1 \setminus \big((\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}) \cup (\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9})\big), \qquad \text{etc.},$$

d. h. für jedes $n \in \mathbb{N}$ entsteht C_{n+1} aus C_n durch Weglassen der offenen mittleren Drittel aller 2^n Intervalle, deren Vereinigung C_n ist. Der Durchschnitt $C = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ heißt das *Cantor'sche Diskontinuum.* Verifizieren Sie die folgenden drei Eigenschaften von C.

(i) C ist kompakt, (ii) das Innere von C ist leer, (iii) C ist überabzählbar.

Hinweis zu (iii): Betrachten Sie die Entwicklung einer Zahl in C zur Basis 3, und benutzten Sie, dass $\{0,2\}^{\mathbb{N}}$ überabzählbar ist (was in den Übungen behandelt wird).

AUFGABE 5.4 (4 Punkte) — Wir sagen, dass eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert, wenn es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\forall \varepsilon > 0\, \exists m \in \mathbb{N}\, \forall n > m\colon |a_n - a| < \varepsilon$.

(i) Zeigen Sie, dass eine reelle Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann in $\mathbb{R}$ konvergiert, wenn ihr Limes Superior und ihr Limes Inferior übereinstimmen und endlich sind.

(ii) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwei reelle Zahlenfolgen mit $\limsup_{n\to\infty} a_n \neq -\infty$ und $\liminf_{n\to\infty} b_n \neq -\infty$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n \leq \limsup_{n\to\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n. \qquad (1)$$

Hierbei sei $a + \infty = \infty + a = +\infty$ für jedes $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

(iii) Geben Sie jeweils Beispiele an, so dass die beiden Ungleichungen in (1) strikt sind.

- **Beachten Sie die organisatorischen Hinweise auf der Rückseite!**

Organisatorische Hinweise

- Die erste Hauptklausur am Samstag, dem 25. November 2006, wird den Stoff der Übungsblätter 1 bis 5 und des gesamten Kapitels 2 der Vorlesung umfassen. Die Einteilung in die beiden Klausursäle wird in Kürze festgelegt werden.

- Es wird Anfang April 2007 eine Nachklausur über den gesamten Stoff der Vorlesung des WS06/07 durchgeführt werden. Zu ihr zugelassen sind diejenigen Studierenden, die entweder (1) beide Hauptklausuren am 25. November und 27. Januar mitschrieben, aber nur genau eine davon bestanden haben (d. h. mindestens 40 Prozent erreichten) oder (2) beide Hauptklausuren bestanden haben, aber in beiden zusammen nicht auf 50 Prozent der Punkte kamen oder (3) zu mindestens einer der beiden Hauptklausuren aus wichtigen Gründen verhindert waren (bei Krankheit o. Ä. ist ein Attest notwendig).

- Zum Erhalt des Scheines sind (außer dem Erfüllen des Hausarbeits- und des Vorrechnenkriteriums) in den Fällen (1) und (2) ein Erzielen von mindestens 50 Prozent der Punkte zusammen aus den beiden besten der insgesamt drei mitgeschriebenen Klausuren notwendig, mindestens aber 40 Prozent in jeder einzelnen dieser beiden. Wer zu einer der beiden Hauptklausuren verhindert ist und die andere mitschreibt, aber nicht besteht, muss in der Nachklausur soviele Punkte erreichen, dass die Gesamtsumme aus den beiden mitgeschriebenen Klausuren mindestens 50 Prozent erreicht. Wer zu beiden Hauptklausuren verhindert ist, muss 50 Prozent der Punkte in der Nachklausur erreichen sowie eine mündliche Rücksprache bestehen. In jeder der drei Klausuren werden genau 100 Punkte zu erreichen sein.

- Die Ergebnisse der Klausur vom 25. November werden voraussichtlich noch am selben Abend auf unserer Homepage erscheinen. Die Klausuren werden in den darauf folgenden Übungsgruppen ausgegeben. Wer die eigene Klausur dann aus dem Übungsgruppensaal entfernt, hat das Ergebnis akzeptiert.