

Analysis A: Übungsblatt 27

Abgabe in den Übungen vom 10. bis 13. Juli 2007

AUFGABE 27.1 (4 Punkte) — Sei $k \in \mathbb{N}$. Wir betrachten das Polynom

$$P(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n: |\alpha|=k} c_\alpha x^\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

wobei $c_\alpha \in \mathbb{R}$ für $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Zeigen Sie Folgendes.

- (i) Für jedes $\beta \in \mathbb{N}^n$ mit $|\beta| = k$ gilt $D^\beta P(x) = \beta! c_\beta$.
- (ii) Falls eine Umgebung der Null existiert, in der $P(x) = 0$ gilt, so sind alle Koeffizienten c_α gleich Null für $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = k$.
- (iii) Es gilt $P(x) = o(\|x\|^{k-1})$ für $x \rightarrow 0$.
- (iv) Falls $P(x) = o(\|x\|^k)$ für $x \rightarrow 0$ gilt, so ist $P(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

AUFGABE 27.2 (4 Punkte) — Es seien $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und $a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}^n$ sowie $m_1, \dots, m_k \in (0, \infty)$ gegeben. Zeigen Sie, dass die Funktion $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sum_{i=1}^k m_i \|x - a_i\|^2$, genau einen Minimierer besitzt, und berechnen Sie diesen Minimierer.

AUFGABE 27.3 (4 Punkte) — Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix. Wir betrachten den Rayleighkoeffizienten $f: \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch $f(x) = \frac{\langle Ax, x \rangle}{\|x\|^2}$.

- (i) Bestimmen Sie alle kritischen Punkte (d. h. Nullstellen des Gradienten) von f und deren Funktionswerte.
- (ii) Charakterisieren Sie alle Maximierer und Minimierer von f .

AUFGABE 27.4 (4 Punkte) — Sei $X \subset \mathbb{R}^m$ offen und $Y \subset \mathbb{R}^n$ offen und beschränkt. Ferner sei $f: \overline{X \times Y} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $\overline{X \times Y}$ und differenzierbar in $X \times Y$. Es existiere eine Abbildung $\xi \in \mathcal{C}^1(X \rightarrow Y)$ mit

$$m(x) := \min_{y \in Y} f(x, y) = f(x, \xi(x)), \quad x \in X.$$

Berechnen Sie den Gradienten von $m: X \rightarrow \mathbb{R}$.

Übungsscheinkriterien: Zur Erinnerung: Einen Übungsschein erhält, wer jeweils 50 Prozent der Punkte auf den Blättern 15 bis 21 sowie auf den Blättern 22 bis 27 erzielt, die Klausur am 14. Juli besteht (oder die Nachklausur im Oktober) sowie eine (nicht zu triviale) Übungsaufgabe erfolgreich an der Tafel vorrechnet.