

Analysis A: Übungsblatt 26

Abgabe in den Übungen vom 3. bis 6. Juli 2007

AUFGABE 26.1 (4 Punkte) — Bestimmen Sie das Taylorpolynom bis einschließlich zweiter Ordnung für die Funktion $f: (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$, um den Entwicklungspunkt $(1, 1)$.

AUFGABE 26.2 (2 + 2 Punkte) — Bestimmen Sie jeweils sämtliche lokalen Extrema und Sattelpunkte der Funktion $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, gegeben durch

$$(i) \quad f(x, y) = (4x^2 + y^2)e^{-x^2-4y^2}, \quad \text{bzw.} \quad (ii) \quad f(x, y) = y^2(x-1) + x^2(x+1).$$

AUFGABE 26.3 (4 Punkte) — DREHINVARIANZ DES LAPLACE-OPERATORS. Es sei $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Orthonormalbasis des \mathbb{R}^n , also $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$ für alle $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Zeigen Sie, dass für jedes $f \in C^2(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R})$ gilt:

$$\Delta f = D_{v_1}^2 f + \dots + D_{v_n}^2 f.$$

Hinweis: Sie dürfen benutzen, dass je zwei ähnliche Matrizen die selbe Spur besitzen.

DEFINITION. Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ konvex, dann heißt $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ *konvex*, falls für je zwei Punkte $x, y \in U$ und jedes $\lambda \in [0, 1]$ gilt:

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

AUFGABE 26.4 (4 Punkte) — Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ konvex und $f \in C^2(U \rightarrow \mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass f genau dann konvex ist, wenn die Hesse'sche Matrix überall in U nichtnegativ definit ist.

Zur Klausur: Am **Samstag, dem 14. Juli**, schreiben wir **ab 8:15 Uhr** im Großen Hörsaal in der Jahnallee 59 (Nähe Am Sportforum) unsere Klausur. Sie ist auf 120 Minuten konzipiert. (*Ausnahme:* für Lehramtsstudent(inn)en, die nach der neuen Modulstruktur studieren, nur 60 Minuten; das ist die Modulklausur.) Die Klausur umfasst den Vorlesungsstoff der Übungsblätter 15 bis einschließlich 26. Die Bedingungen sind die gleichen wie im letzten Semester: Jede(r) Teilnehmer(in) darf einen einseitig handbeschriebenen Zettel beliebigen Inhalts mitbringen (Nichtdeutschsprachige auch ein Wörterbuch), ansonsten aber nur noch Schreibzeug und leeres Papier. Bringen Sie bitte einen Lichtbildausweis mit!

Lehrevaluation: In den Vorlesungen in der zweiten Junihälfte können sich alle Teilnehmer auf einem ausliegenden Formular eintragen, um an der Lehrevaluation teilzunehmen, die in der Zeit vom 2. bis 16. Juli laufen wird.