Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Wahrscheinlichkeitstheorie II: Übungsblatt 21

Abgabe in den Übungen vom 10. und 11. Dezember 2008

AUFGABE 21.1 (REKURRENZ IST EINE KLASSENEIGENSCHAFT) (4 Punkte) — Sei P eine stochastische Matrix auf einer höchstens abzählbaren Menge I. Seien $i, j \in I$ mit $i \leftrightsquigarrow j$. Zeigen Sie, dass i genau dann rekurrent ist, wenn es j ist.

AUFGABE 21.2 (4 Punkte) — Sei $N \in \mathbb{N}$, und sei $P = (p_{i,j})_{i,j \in I}$ eine stochastische Matrix auf $I = \{0, \dots, N\}$ mit $p_{i,j} = 0$ für $|i - j| \geq 2$ und $p_{i,i+1} > 0$ für $i = 1, \dots, N-1$. Es gelte $p_{0,0} = 1$ und $p_{N,N} = 1$, d. h. die Zustände 0 und N seien absorbierend. Wenn $(X_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf I ist mit Übergangsmatrix P, dann sei $T_i = \inf\{n \in \mathbb{N} \colon X_n = i\}$ die Ersteintrittzeit in $i \in E$. Ferner sei $u_i = \mathbb{P}_i(T_N < T_0)$ die Wahrscheinlichkeit, dass die in i gestartete Kette in N absorbiert wird. Zeigen Sie:

(i) Der Vektor $(u_i)_{i \in E}$ ist ein Rechtseigenvektor der Matrix P zum Eigenwert 1.

(ii) Mit $\varrho_j = \prod_{k=1}^{j} \frac{p_{k,k-1}}{p_{k,k+1}}$ für $j \in I \setminus \{N\}$ und $\varrho_N = 0$ gilt die Formel

$$u_i = \frac{\sum_{j=0}^{i-1} \varrho_j}{\sum_{j=0}^{N} \varrho_j}, \qquad i \in I.$$

(iii) Die in 1 gestartete symmetrische Irrfahrt auf $\mathbb{Z}$ besucht mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{N}$ den Punkt N, bevor sie die Menge $-\mathbb{N}_0$ erreicht.

AUFGABE 21.3 (RANDOMISIERTES EHRENFESTMODELL) (4 Punkte) — Insgesamt N Kugeln seien in zwei Behältern A und B. Es sei ein Parameter $p \in (0, 1)$ gegeben. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählen wir im Zeitintervall $(n-1, n)$ eine dieser N Kugeln mit gleicher Wahrscheinlichkeit aus und geben sie mit Wahrscheinlichkeit p in den Behälter A und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ in den Behälter B. Es sei Z_n die Anzahl der Kugeln in A zum Zeitpunkt n, also sind $N - Z_n$ Kugeln in B. Alle Ziehungen und Zurücklegungen seien unabhängig, also ist $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markovkette auf $I = \{0, 1, \dots, N\}$.

(i) Bestimmen Sie die Übergangsmatrix der Kette $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$.

(ii) Sei Z_0 binomialverteilt auf I mit Parameter p. Bestimmen Sie die Verteilung von Z_n für jedes n.

AUFGABE 21.4 (4 Punkte) —Es sei die folgende stochastische Matrix mit der Indexmenge $I = \{1, \dots, 6\}$ gegeben:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Bestimmen Sie alle Klassen, ihre Rekurrenzeigenschaften und ihre gegenseitigen Erreichbarkeiten.

(ii) Ermitteln Sie die Werte von $f_{i,j} = \mathbb{P}_i(T_j < \infty)$ für alle $(i, j) \in \{(1, 2), (1, 4), (2, 4), (4, 2)\}$.

Hinweis zu (ii): Überlegen Sie sich, dass $f_{i,j} = p_{i,j} + \sum_{k \in I \setminus \{j\}} p_{i,k} f_{k,j}$ für alle $i, j \in I$ gilt, und lösen Sie das Gleichungssystem.

Hinweis: Bei der diesjährigen Weihnachtsvorlesung wird **Herr Professor Stückrad** am 17. Dezember ab 15:00 Uhr im Schulmuseum Leipzig (Goerdelerring 20 in 04109 Leipzig) über **Mathematik und Musik** vortragen. Verbinden Sie den Besuch dieser netten Veranstaltung mit dem Kennenlernen des neuen mathematisch-naturwissenschaftlichen Bildungszentrums *Inspirata*!