Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2008/09

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Wahrscheinlichkeitstheorie II: Übungsblatt 18

Abgabe in der Übung vom 20. November 2008 bzw. nach Vereinbarung

AUFGABE 18.1 (3 Punkte) — Es sei X eine $\mathbb{R}^d$-wertige Zufallsgrößen mit charakteristischer Funktion φ. Zeigen Sie, dass φ genau dann reellwertig ist, wenn X und $-X$ die selbe Verteilung haben.

AUFGABE 18.2 (4 Punkte) — Sei X eine reellwertige Zufallsgröße mit charakteristischer Funktion φ. Es existiere ein $n \in \mathbb{N}$ mit $\mathbb{E}[|X|^n] < \infty$. Zeigen Sie, dass φ für jedes $k \in \{0, 1, \dots, n\}$ mindestens n Mal differenzierbar ist und dass die Ableitungen gegeben sind durch

$$\varphi^{(k)}(t) = \mathbb{E}[(\mathrm{i}X)^k \,\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}].$$

Hinweis: Betrachten Sie $Y_k(t, h, x) = k!h^{-k}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tX}\big(\mathrm{e}^{\mathrm{i}hX} - \sum_{l=0}^{k-1} \frac{(\mathrm{i}hX)^l}{l!}\big)$ oder benutzen Sie das Differenziationslemma.

AUFGABE 18.3 (SATZ VON CRAMÉR-WOLD) (3 Punkte) — Seien $X, X_1, X_2, \dots$ Zufallsvektoren mit Werten im $\mathbb{R}^d$. Zeigen Sie, dass $X_n \Longrightarrow X$ genau dann gilt, wenn für jedes $\lambda \in \mathbb{R}^d$ gilt: $\langle \lambda, X_n \rangle \Longrightarrow \langle \lambda, X \rangle$.

Hinweis: Bei der Richtung '$\Longleftarrow$' zeigen Sie zunächst die Straffheit und betrachten dann die charakteristischen Funktionen.

AUFGABE 18.4 (3 Punkte) — Es sei X ein $\mathbb{R}^d$-wertiger Zufallsvektor mit einer positiv definiten Kovarianzmatrix. Zeigen Sie, dass X genau dann normalverteilt ist, wenn für jedes $\lambda \in \mathbb{R}^d$ die Zufallsgröße $\langle \lambda, X \rangle$ normalverteilt ist, und bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von $\langle \lambda, X \rangle$.

AUFGABE 18.5 (3 Punkte) — Es seien $X, X_1, X_2, \dots$ und $Y, Y_1, Y_2, \dots$ Zufallsgrößen, so dass X_n und Y_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ unabhängig sind. Ferner gelte $X = \lim_{n\to\infty} X_n$ und $Y = \lim_{n\to\infty} Y_n$ fast sicher. Zeigen Sie, dass X und Y unabhängig sind.

Hinweis: Hiermit beweisen Sie eine Verstärkung der Aussage von Aufgabe 15.2: Man benötigt nicht, dass X und Y keine Atome besitzen.