Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2007/08

Prof. Dr. Wolfgang König

Maß- und Integrationstheorie: Übungsblatt 14

Abgabe in den Übungen vom 29. Januar bis 1. Februar 2008

AUFGABE 14.1 (4 Punkte) — Zeigen Sie, dass das d-fache Produkt der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}$ auf $\mathbb{R}$ gleich der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}_d$ auf dem $\mathbb{R}^d$ ist.

AUFGABE 14.2 (4 Punkte) — Zeigen Sie, dass die Menge der reellen Nullfolgen und die der reellen konvergenten Folgen beide in der Produkt-σ-Algebra $\mathcal{B}^{\otimes\mathbb{N}}$ liegen.

AUFGABE 14.3 (4 Punkte) —

1. Es seien λ das Lebesgue-Maß auf $([0,1],\mathcal{B}_{[0,1]})$ und $\{\delta_n\}_{n\in\mathbb{N}}\subset[0,1)$ eine wachsende Folge mit $\lim_{n\to\infty}\delta_n = 1$. Für jedes $n\in\mathbb{N}$ sei $g_n\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ stetig mit $\int_{[0,1]} g_n\,\mathrm{d}\lambda = 1$ und $\mathrm{Supp}(g_n)\subset[\delta_n,\delta_{n+1}]$. Die Funktion $f\colon[0,1]^2\to\mathbb{R}$ sei definiert durch
$$f(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}(g_n(x)-g_{n+1}(x))\,g_n(y),\qquad x,y\in[0,1].$$
Zeigen Sie, dass gilt
$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\lambda(\mathrm{d}y)\,\lambda(\mathrm{d}x)=1\neq 0=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\lambda(\mathrm{d}x)\,\lambda(\mathrm{d}y).$$

2. Es sei μ das Zählmaß auf $([0,1],\mathcal{B}_{[0,1]})$, d. h. $\mu(A)=\#A$, falls A endlich, und $\mu(A)=\infty$ sonst. Ferner sei f die Indikatorfunktion auf $\Delta:=\{\,(x,y)\in[0,1]^2\mid x=y\,\}$. Zeigen Sie:
$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\mu(\mathrm{d}y)\,\lambda(\mathrm{d}x)=1\neq 0=\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,\lambda(\mathrm{d}x)\,\mu(\mathrm{d}y).$$

AUFGABE 14.4 (4 Punkte) — Seien $(\Omega,\mathcal{F},\mu)$ ein σ–endlicher Maßraum, λ das Lebesgue–Maß auf $(\mathbb{R},\mathcal{B})$ und $f\colon\Omega\to[0,\infty)$ eine nichtnegative messbare Funktion. Zeigen Sie:
$$\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu=\int_{(0,\infty)}\mu\,(f>t)\;\lambda(\mathrm{d}t).$$