Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2006/07

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Analysis A: Übungsblatt 13

Abgabe in den Übungen vom 25. bis 31. Januar 2007

AUFGABE 13.1 (4 Punkte) — Berechnen Sie

$$A = \lim_{x\to 0}\Big(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\Big) \qquad \text{und} \qquad B = \lim_{x\to\pi/2}\Big(x - \frac{\pi}{2}\Big)\tan x.$$

AUFGABE 13.2 (4 Punkte) — Es sei $a \in (0,\infty)$. Untersuchen Sie die Funktion

$$f\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = x^a \mathrm{e}^x,$$

auf Extremwerte.

AUFGABE 13.3 (3 Punkte) — Zeigen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ das n-te *Legendre'sche Polynom*

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big[(x^2-1)^n\big]$$

im Intervall $(-1,1)$ genau n paarweise verschiedene Nullstellen besitzt.

AUFGABE 13.4 (3 Punkte) — Leiten Sie aus den Additionstheoremen für Sinus und Cosinus welche für den Tagens her, d. h. drücken Sie $\tan(x+y)$ und $\tan(x-y)$ mit Hilfe von $\tan(x)$ und $\tan(y)$ aus für alle $x, y \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$, so dass auch $x \pm y \in \mathbb{R} \setminus (\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z})$.

AUFGABE 13.5 (2 Punkte) — Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in [0,\infty)$ und alle $p, q \in (1,\infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ gilt:

$$x^{1/p}y^{1/q} \le \frac{x}{p} + \frac{y}{q}.$$

Hinweis: Logarithmieren Sie die Ungleichung und bringen Sie Konvexität ins Spiel.

Verschiebung der Klausur am 27. Januar 2007

Da die Experimentalphysik-Klausur ebenfalls am Vormittag des 27. Januar geschrieben werden soll, sind diese und unsere Zweite Klausur leicht verschoben worden: Unsere Klausur beginnt nun **um 8:00 Uhr** (und geht also voraussichtlich bis 9:30 Uhr), und die Experimentalphysik-Klausur **um 10:15 Uhr**. Alle anderen Bedingungen bleiben unverändert. Jede(r) Teilnehmer(in) unserer Zweiten Klausur, der/die auch an der Experimentalphysik-Klausur teilnimmt, darf gerne (unabhängig vom Anfangsbuchstaben des Nachnamens) im Carl-Ludwig-Institut in der Liebigstr. schreiben.