Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2008

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Wahrscheinlichkeitstheorie I: Übungsblatt 12

Abgabe am 8. bis 10. Juli 2008

AUFGABE 12.1 (2 Punkte) — Es sei μ die Exponentialverteilung auf $\mathbb{R}$, d. h. μ habe die Dichte $t \mapsto \mathrm{e}^{-t}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)$. Charakterisieren Sie das Bildmaß von μ unter der Abbildung $x \mapsto \alpha x$ für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ durch Angabe einer Dichte.

AUFGABE 12.2 (2 Punkte) — Es sei X eine $(0, \infty)$-wertige Zufallsgröße mit Dichte φ. Ermitteln Sie eine Dichte der Zufallsgröße $\sqrt{X}$.

AUFGABE 12.3 (4 Punkte) — Es seien U und V zwei unabhängige, auf $(0, 1)$ gleichförmig verteilte Zufallsvariable sowie

$$R = \sqrt{-2\log U}, \qquad X = R\cos(2\pi V), \qquad Y = R\sin(2\pi V).$$

Zeigen Sie, dass X und Y zwei unabhängige standardnormalverteilte Zufallsgrößen sind.

AUFGABE 12.4 (4 Punkte) — Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen reellwertigen Zufallsgrößen. Zeigen Sie, dass die Cesaro-Grenzwerte

$$\underline{Y} = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \qquad \text{und} \qquad \overline{Y} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

fast sicher konstant sind (mit Werten in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$).

AUFGABE 12.5 (4 Punkte) — Jede Kante zwischen zwei Nachbarn auf dem Gitter $\mathbb{Z}^d$ sei mit einer festen Wahrscheinlichkeit 'durchlässig' und ansonsten 'undurchlässig'. Die Durchlässigkeit der Kanten sei unabhängig. Das Wasser kann nur entlang durchlässiger Kanten fließen. Beweisen Sie für $d = 1$, dass das Ereignis 'Es existiert ein Punkt, von dem aus das Wasser nach Unendlich fließen kann' nur die Wahrscheinlichkeit 0 oder 1 annehmen kann.