Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2008

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Wahrscheinlichkeitstheorie I: Übungsblatt 11

Abgabe am 1. bis 3. Juli 2008

AUFGABE 11.1 (4 Punkte) — Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$, und es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige, zum Parameter p Bernoulli-verteilte Zufallsgrößen. Wir setzen $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Zeigen Sie, dass für jedes $a \in (p,1)$ gilt:

$$\mathbb{P}(S_n > an) \leq \mathrm{e}^{-nh_p(a)}, \qquad \text{wobei } h_p(a) = a \log \frac{a}{p} + (1-a) \log \frac{1-a}{1-p}.$$

Hinweis: Orientieren Sie sich am Beweis des Lemmas 5.1.5.

AUFGABE 11.2 (4 Punkte) — In Phantasia kommt es zur Stichwahl zwischen den Kandidaten A und B. Kandidat A hat 1500 treue Anhänger, Kandidat B ist sich der Stimmen seiner 500 Gefolgsleute sicher. Die restlichen 998 000 Wahlberechtigten stimmen unabhängig voneinander mit gleicher Wahrscheinlichkeit für Kandidat A bzw. B. Schätzen Sie durch Normalapproximation die Wahrscheinlichkeit dafür ab, dass Kandidat A die Stichwahl gewinnt.

AUFGABE 11.3 (4 Punkte) — Es sei φ die Dichte und Φ die Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung. Beweisen Sie für alle $a > 0$ die Abschätzungen

$$\frac{a}{1+a^2}\varphi(a) \leq 1 - \Phi(a) \leq \frac{1}{a}\varphi(a).$$

AUFGABE 11.4 (4 Punkte) — Zeigen Sie durch Anwendung des Zentralen Grenzwertsatzes (Satz 5.2.2) die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{e}^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}.$$