Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2006/07

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Analysis A: Übungsblatt 10

Abgabe in den Übungen vom 4. bis 10. Januar 2007

AUFGABE 10.1 (4 Punkte) —

(i) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, und sei $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie, dass $f(I)$ auch ein Intervall ist.

(ii) Seien $a < b$ und $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f([a,b]) \subset [a,b]$. Zeigen Sie, dass f einen Fixpunkt besitzt, also einen Punkt $x_0 \in [a,b]$ mit $f(x_0) = x_0$.

AUFGABE 10.2 (3 Punkte) — Untersuchen Sie die Funktionen

$$f_1, f_2\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \text{definiert durch } f_1(x) = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x} \quad \text{und} \quad f_2(x) = 1 + \mathrm{e}^x,$$

auf gleichmäßige Stetigkeit.

AUFGABE 10.3 (4 Punkte) — Zeigen Sie, dass die Exponentialfunktion $\exp$ die einzige in Null stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist, die die Funktionalgleichung $f(x+y) = f(x)f(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ erfüllt sowie $f(0) = 1$ und $f(1) = \mathrm{e}$.

Hinweis: Zeigen Sie die Gleichung $f(x) = \mathrm{e}^x$ schrittweise für $x \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{Q}$ und $x \in \mathbb{R}$.

AUFGABE 10.4 (3 Punkte) — Untersuchen Sie die Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx} \qquad \text{und} \qquad g_n(x) = \frac{x}{1+nx}, \qquad x \in (0,1),$$

auf gleichmäßige Konvergenz im Intervall $(0,1)$.

Sprechweise: Für Funktionen $f, g\colon (0,1) \to (0,\infty)$ sagen wir

$$f(x) = o(g(x)) \qquad (\text{"}f(x) \text{ ist ein klein-oh von } g(x)\text{"}) \quad \text{für } x \downarrow 0,$$

falls für jede Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(0,1)$ gilt: $\lim_{n\to\infty} f(a_n)/g(a_n) = 0$. Wir schreiben

$$f(x) = O(g(x)) \qquad (\text{"}f(x) \text{ ist ein groß-oh von } g(x)\text{"}) \quad \text{für } x \downarrow 0,$$

falls für jede Nullfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(0,1)$ der Ausdruck $f(a_n)/g(a_n)$ beschränkt bleibt.

AUFGABE 10.5 (2 Punkte) — Zeigen Sie, dass für $x \downarrow 0$ gelten:

(i) $\displaystyle \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + o(x^2),$ (ii) $\displaystyle \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + O(x^4).$

Hinweis: Eventuell sind eine Reihendarstellung und ein Vertauschungssatz hilfreich.