Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2008

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

# Wahrscheinlichkeitstheorie I: Trainingsblatt

Dieses Blatt enthält Aufgaben zum Stoff der Blätter 1 bis 12 und soll dem Training für die Klausur am 19. Juli dienen. Es wird ausdrücklich keine Aussage über die Relation der Schwierigkeit dieser Aufgaben zu den Klausuraufgaben gemacht. Auch wird keine Aussage darüber gemacht, ob die Verteilung der Themen der Klausuraufgaben ähnlich der dieses Trainingsblattes sei.
Die ersten vier Aufgaben sind bepunktet und gelten als zusätzlich erreichbare Punkte zu den 56 geforderten Punkten aus den Blätter 8 bis 14. Die Abgaben Derjenigen, die dieses Kriterium knapp nicht erfüllt haben, werden von den Übungsgruppenleitern bepunktet.

AUFGABE 0.1 (4 Punkte) — Sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter, zentrierter Zufallsgrößen mit Varianz Eins. Ferner sei $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar mit $f'(0)\neq 0$, so dass $f''$ beschränkt ist. Zeigen Sie, dass

$$\frac{\sqrt{n}}{f'(0)}\Big(f\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\Big)-f(0)\Big)$$

für $n\to\infty$ schwach gegen die Standardnormalverteilung konvergiert.

AUFGABE 0.2 (4 Punkte) — Sei $X$ Cauchy-verteilt mit Dichte $f(x)=(\pi(1+x^2))^{-1}$, $x\in\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $(1+X^2)^{-1}$ die Arcussinus-Verteilung hat.
(Die Arcussinus-Verteilung besitzt die Verteilungsfunktion $t\mapsto \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{t}$.)

AUFGABE 0.3 (4 Punkte) — Sei $K=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|\colon x^2+y^2+z^2\leq R\}$ die Kugel vom Radius $R$ um den Ursprung im $\mathbb{R}^3$. Ein Punkt $X\in K$ werde nach der Gleichverteilung gewählt. Bestimmen Sie eine Dichte von $|X|$.

AUFGABE 0.4 (4 Punkte) — Es seien $\mu\in\mathbb{R}^d$ und $C$ eine reelle, symmetrische positiv definite $d\times d$-Matrix. Sei $X$ ein $\mathcal{N}(\mu,C)$-verteilter Zufallsvektor. Ermitteln Sie für jede $m\times d$-Matrix $A$ die Verteilung von $AX$.

AUFGABE 0.5 LOKALE NORMALAPPROXIMATION FÜR DIE POISSON-VERTEILUNG. Es sei $\alpha\in(0,\infty)$, und für $n\in\mathbb{N}$ und $k\in\mathbb{N}_0$ sei $x_n(k)=(k-\alpha n)/\sqrt{\alpha n}$. Zeigen Sie, dass für jedes $c\in(0,\infty)$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty}\max_{k\in\mathbb{N}_0\colon |x_n(k)|\leq c}\Big|\frac{\sqrt{\alpha n}\mathrm{Po}_{\alpha n}(k)}{\varphi(x_n(k))}-1\Big|=0,$$

wobei $\varphi$ die Dichte der Standardnormalverteilung ist.

AUFGABE 0.6 Es sei $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, identisch verteilter Zufallsgrößen. Es existiere ein $a\in\mathbb{R}$ mit $X_i\leq a$ fast sicher für alle $i\in\mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es dann ein $b\in\mathbb{R}$ gibt, so dass $\max\{X_1,\dots,X_n\}$ für $n\to\infty$ schwach gegen $b$ konvergiert, und charakterisieren Sie $b$.

AUFGABE 0.7 Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $f, g \in \mathcal{L}^2$. Zeigen Sie, dass die Kovarianz von $f$ und $g$ mit Hilfe zweier unabhängiger Zufallsgrößen $X$ und $Y$ mit Verteilung $\mathbb{P}$ geschrieben werden kann als

$$\operatorname{cov}(f, g) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\big[(f(X) - f(Y))(g(X) - g(Y))\big].$$

Folgern Sie daraus, dass im Fall $(\Omega, \mathcal{F}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$, wenn $f$ und $g$ beide monoton wachsend sind, gilt: $\operatorname{cov}(f, g) \geq 0$, d. h., dass $f$ und $g$ positiv korreliert sind.

AUFGABE 0.8 Beim zweimaligen Wurf mit einem fairen Tetraeder-Würfel, dessen Flächen mit 1,2,3 und 4 beschriftet sind, bezeichne $X$ die Summe und $Y$ das Maximum der jeweils unten liegenden Augenzahl.

1. Bestimmen Sie die gemeinsame Verteilung von $X$ und $Y$.
2. Konstruieren Sie zwei Zufallsvariable $X'$ und $Y'$ mit den selben Verteilungen wie $X$ und $Y$, so dass jedoch $X + Y$ eine andere Verteilung hat als $X' + Y'$.

AUFGABE 0.9 Zeigen Sie ohne Verwendung von Ergebnissen aus der Vorlesung, dass für je drei Ereignisse $A$, $B$ und $C$ gelten:

1. Falls $A$ und $B$ unabhängig sind, so auch $A$ und $B^{\mathrm{c}}$.
2. Falls $A$, $B$ und $C$ unabhängig sind, so auch $A \cup B$ und $C$.

AUFGABE 0.10 Anton und Brigitte vereinbaren ein faires Spiel über sieben Runden. Jeder zahlt fünf Euro als Einsatz, der Gewinner soll die gesamten zehn Euro erhalten. Nach fünf Runden steht es $2 : 3$ für Brigitte. Stellen Sie ein geeignetes Modell auf, in dem Sie die Gewinnwahrscheinlichkeiten von Anton und Brigitte berechnen.