Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Sommersemester 2008

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG

Wahrscheinlichkeitstheorie I: Erstes Extrablatt

Abgabe am 1. bis 3. Juli 2008

Wer auf den Aufgabenblättern 1 bis 7 nicht die erforderlichen 56 Punkte erreicht hat, kann diesen Teil des Übungsscheinkriteriums doch noch erfüllen, indem er/sie entweder (a) mindestens acht Punkte auf diesem Aufgabenblatt erreicht oder (b) das Zweifache der fehlenden Punktzahl auf den Aufgabenblättern 8 bis 14 zusätzlich zu den dort geforderten Punkten erreicht oder (c) beides macht.

(Erklärung zu (b): Wer auf den Blättern 1 bis 7 nur $n \in \{0, \dots, 55\frac{1}{2}\}$ Punkte erreichte, muss auf den Blättern 8 bis 14 dann mindestens $56 + 2(56 - n)$ Punkte erreichen.)

AUFGABE 0.1 (4 Punkte) — Ein Raucher hat in beiden Jackentaschen je eine Schachtel mit N Streichhölzern. Er bedient sich stets mit gleicher Wahrscheinlichkeit links oder rechts, und zwar trifft er diese Entscheidung jedes Mal unabhängig. Zum ersten Zeitpunkt, zu dem eine der beiden Schachtel leer geworden ist, sind noch K Streichhölzer in der anderen Schachtel übrig. Bestimmen Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum, und ermitteln Sie die Verteilung von K.

AUFGABE 0.2 (4 Punkte) — Es seien $\alpha, t \in (0, \infty)$, $r \in \mathbb{N}$ und $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $(0, 1)$ mit $\lim_{n\to\infty} np_n = \alpha$ sowie $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{N}$ mit $\lim_{n\to\infty} t_n/n = t$. Zeigen Sie, dass gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{t_n} \mathrm{Neg}_{r,p_n}(k) = \Gamma_{\alpha,r}((0, t]),$$

wobei Neg_{r,p_n} die negative Binomialverteilung mit Parametern r und p_n ist und $\Gamma_{\alpha,r}$ die Gamma-Verteilung mit Parametern α und r. Interpretieren Sie das Ergebnis mit Hilfe von Wartezeiten.

AUFGABE 0.3 (4 Punkte) — In einem Laden ist eine Alarmanlage eingebaut, die im Falle eines Einbruchs mit Wahrscheinlichkeit $0,99$ die Polizei alarmiert. In einer Nacht ohne Einbruch wird mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,02$ ein Fehlalarm ausgelöst (etwa durch eine Maus). Die Einbruchswahrscheinlichkeit in einer Nacht beträgt $0,0005$. Die Anlage hat gerade Alarm gegeben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein Einbruch im Gange?
Zu der Lösung dieser Aufgabe gehört die Angabe eines geeigneten Wahrscheinlichkeitsraums.

AUFGABE 0.4 (4 Punkte) — Es seien X und Y zwei unabhängige, identisch verteilte $\mathbb{N}_0$-wertige Zufallsgrößen mit

(a) $\mathbb{P}(X = k \mid X + Y = n) = \frac{1}{n+1}$ für jedes $k \in \{0, \dots, n\}$ oder mit

(b) $\mathbb{P}(X = k \mid X + Y = n) = \binom{n}{k} 2^{-n}$ für jedes $k \in \{0, \dots, n\}$.

Bestimmen Sie die Verteilung von X (und also auch von Y).