

Wahrscheinlichkeitstheorie II: Übungsblatt 5

Abgabe in den Übungen vom 17. bis 22. November 2005

AUFGABE 5.1 Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, auf $[0, 1]$ gleichförmig verteilter Zufallsgrößen. Wir setzen $Y_n = n(1 - \max\{X_1, \dots, X_n\})$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass Y_n schwach gegen die Exponential-Verteilung mit Parameter Eins konvergiert. **2 Punkte**

AUFGABE 5.2 Seien $\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \dots$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf \mathbb{R} mit $\mathbb{P}(\mathbb{Z}) = \mathbb{P}_n(\mathbb{Z}) = 1$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Mit $\tilde{\mathbb{P}}$ bzw. $\tilde{\mathbb{P}}_n$ bezeichnen wir die Einschränkungen auf die Potenzmenge von \mathbb{Z} . Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden vier Aussagen:

- (i) $\mathbb{P} = \text{w-lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n$,
- (ii) $\tilde{\mathbb{P}} = \text{w-lim}_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathbb{P}}_n$,
- (iii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n(\{k\}) = \mathbb{P}(\{k\})$ für jedes $k \in \mathbb{Z}$,
- (iv) $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n(B) = \mathbb{P}(B)$ für jedes $B \in \mathcal{B}$.

4 Punkte

AUFGABE 5.3 (VERTEILUNGSKONVERGENZ UND STETIGE BILDER) Seien (E_1, d_1) und (E_2, d_2) metrische Räume, und sei $h: E_1 \rightarrow E_2$ eine Borel-messbare Funktion, so dass die Unstetigkeitsmenge \mathcal{U}_h messbar sei. Ferner seien $\mathbb{P}, \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \dots$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf E_1 mit $\mathbb{P}(\mathcal{U}_h) = 0$ und $\mathbb{P} = \text{w-lim}_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}_n$. Zeigen Sie, dass dann auch die Bildmaße $\mathbb{P}_n \circ h^{-1}$ gegen das Bildmaß $\mathbb{P} \circ h^{-1}$ schwach konvergieren. **3 Punkte**

AUFGABE 5.4 Sei $\Phi = \{\mathcal{N}(\mu, \sigma^2) : (\mu, \sigma^2) \in L\}$ eine Familie von Normalverteilungen, wobei $L \subset \mathbb{R} \times (0, \infty)$ eine Indexmenge ist. Zeigen Sie, dass Φ genau dann straff ist, wenn L beschränkt ist. **4 Punkte**

AUFGABE 5.5 Mit \mathcal{C} bezeichnen wir die Menge aller stetigen Abbildungen $[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$. Für $m \in \mathbb{N}$ und $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_m \leq 1$ sei $\pi_{t_1, \dots, t_m}: \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^m$ die Projektionsabbildung $f \mapsto (f(t_1), \dots, f(t_m))$.

Seien $f, f_1, f_2, \dots \in \mathcal{C}$. Zeigen Sie, dass f_n genau dann punktweise für $n \rightarrow \infty$ gegen f konvergiert, wenn für jedes $m \in \mathbb{N}$ und alle $0 \leq t_1 < \dots < t_m \leq 1$ die Bildmaße $\delta_{f_n} \circ \pi_{t_1, \dots, t_m}^{-1}$ schwach gegen das Bildmaß $\delta_f \circ \pi_{t_1, \dots, t_m}^{-1}$ konvergieren. **3 Punkte**