Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2005/06

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG
Dr. W. QUAPP, S. HOFMANN
S. HOHLOCH, G. NOETZEL

Wahrscheinlichkeitstheorie II: Übungsblatt 3

Abgabe in den Übungen vom 3. bis 8. November 2005

AUFGABE 3.1 (BEDINGTE HÖLDER'SCHE UNGLEICHUNG) Seien $p, q \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, und seien $X \in \mathcal{L}^p$ und $Y \in \mathcal{L}^q$ zwei Zufallsgrößen. Benutzen Sie Satz 7.3.29, um zu zeigen, dass fast sicher gilt:

$$\mathbb{E}[|XY| \mid \mathcal{A}] \leq \mathbb{E}[|X|^p \mid \mathcal{A}]^{\frac{1}{p}} \, \mathbb{E}[|Y|^q \mid \mathcal{A}]^{\frac{1}{q}}.$$

3 Punkte

Definition. Die k-dimensionale *Normalverteilung* $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ mit Erwartungswertvektor $\mu \in \mathbb{R}^k$ und positiv definiter Kovarianzmatrix $\Sigma \in \mathbb{R}^{k \times k}$ hat die Dichte

$$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^k \det(\Sigma^2)}} \exp\Big\{ -\frac{1}{2}(x-\mu)^{\mathrm{T}} \Sigma^{-1} (x-\mu) \Big\}.$$

Sie ist gleich dem Bildmaß der Standardnormalverteilung $\mathcal{N} = \mathcal{N}(0, \mathrm{Id})$ unter der affinen Abbildung $x \mapsto Ax + \mu$, wobei $\Sigma = AA^{\mathrm{T}}$. Siehe Beispiel 6.6.7 im Skript des Sommersemesters 05.
Zwei Zufallsvektoren X und Y heißen *gemeinsam normalverteilt*, wenn der Vektor (X, Y) normalverteilt ist.

AUFGABE 3.2 Es seien $X\colon \Omega \to \mathbb{R}^m$ und $Y\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ zwei gemeinsam normalverteilte Zufallsvektoren auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ mit Erwartungswertvektoren $a = \mathbb{E}(X)$ und $b = \mathbb{E}(Y)$ sowie den invertierbaren Kovarianzmatrizen A von X bzw. B von Y, sowie $C := \mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[\,(X - \mathbb{E}(X))(Y - \mathbb{E}(Y))^{\mathrm{T}}\,]$.
Für alle $y \in \mathbb{R}^n$ sei $Q(y, \cdot) = \mathcal{N}(q_y, D)$ die m-dimensionale Normalverteilung mit Erwartungswertvektor $q_y = a + CB^{-1}(y - b)$ und Kovarianzmatrix $D = A - CB^{-1}C^{\mathrm{T}}$. Zeigen Sie, daß Q eine reguläre Version der bedingten Verteilung von X gegeben Y ist.
Hinweise:

1. Sie müssen u. A. die Messbarkeit von $Q(\cdot, M)$ für jedes $M \in \mathcal{B}_m$ zeigen. Zeigen Sie zunächst, daß $Q(y, M) = Q(0, M_y)$ mit $M_y := \{\, v - CB^{-1}y \colon v \in M \,\}$ für alle $y \in \mathbb{R}^n$ gilt. Zeigen Sie dann, daß $\{\, y \in \mathbb{R}^n \colon Q(y, (-\infty, t]) < \alpha \,\}$ für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ und alle Mengen $(-\infty, t] := (-\infty, t_1] \times \cdots \times (-\infty, t_m] \subset \mathbb{R}^m$ offen ist. Betrachten Sie nun das Dynkin-System $\mathcal{D} = \{\, M \in \mathcal{B}_m \colon Q(\cdot, M)$ ist $\mathcal{B}_n$-$\mathcal{B}$-messbar$\}$.

2. Machen Sie sich klar, dass Sie auch zeigen müssen, dass für alle $M \in \mathcal{B}_m$, $N \in \mathcal{B}_n$ gilt: $\mathbb{P} \circ (X, Y)^{-1}(M \times N) = \int_N Q(y, M) \, \mathbb{P} \circ Y^{-1}(\mathrm{d}y)$.

6 Punkte

AUFGABE 3.3 Sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger, zum Parameter 1 exponentialverteilter Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass $\limsup_{n \to \infty} X_n / \log n = 1$ fast sicher gilt. **3 Punkte**

AUFGABE 3.4 (TRANSIENZ DER UNSYMMETRISCHEN IRRFAHRT) Sei $p \in (0, 1) \setminus \{\frac{1}{2}\}$, und sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge unabhängiger Zufallsvariablen, die die Werte 1 und -1 mit Wahrscheinlichkeit p bzw. $1 - p$ annehmen. Wir betrachten die Folge der Partialsummen, also $S_0 = 0$ und $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Irrfahrt $(S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ mit Wahrscheinlichkeit Eins nur endlich oft zum Ursprung zurückkehrt. **4 Punkte**