Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2006/07

Prof. Dr. Wolfgang König
14. April 2007
8:30 – 10:00 Uhr

Modulklausur (Lehramt) und Dritte Klausur zur Vorlesung Analysis A, Diff- und Int-Rechnung 1

Name:
Vorname:
Matrikelnummer:
Übungsleiter(in):
Ist dies Ihre Lehramts-Modulklausur?

- Tragen Sie bitte zu allererst die obigen Angaben ein aber sonst nichts auf dieser Seite.
- Das einzige zugelassene Hilfsmittel ist ein einseitig von Ihrer Hand beschriebenes DIN A4-Blatt mit beliebigem Text. Bei Nicht-Deutschsprachigen ist auch ein Wörterbuch zugelassen.
- Für das Übungsscheinkriterium gilt: Mit einer Gesamtpunktzahl von mindestens 30 (von 100) gilt diese Klausur als bestanden. Um den Klausurteil des Übungsscheinkriteriums zu erfüllen, sind mindestens 90 Punkte (von 200) aus insgesamt zwei Klausuren notwendig.
- Für die Modulklausur (Lehramt) gilt: Mit einer Gesamtpunktzahl von mindestens 40 (von 100) gilt diese Klausur als bestanden.

Viel Erfolg!

Aufgaben-Nr.	1	2	3	4	5
Punkte					

Gesamtpunktzahl:

20 P. **Aufgabe 1** —— Benutzen Sie eine Vollständige Induktion, um zu zeigen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}^*$ und alle $a_1, \ldots, a_n \in (0, \infty)$ gilt:

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i\Big)\Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i}\Big) \geq n^2.$$

Geben Sie dabei eine vollständige Formulierung der Induktionsannahme und markieren Sie im Induktionsschluss, wo sie eingeht.

Hinweis: Benutzen Sie auch die Ungleichung $x + y \geq 2\sqrt{xy}$, die bekanntermaßen für alle $x, y \in (0, \infty)$ gilt.

20 P. **Aufgabe 2** —— Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Jede konvergente Folge ist beschränkt.

(ii) Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat genau dann einen endlichen limes inferior, wenn gilt:

$$\exists R \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N} \quad \big[n > N \quad \Longrightarrow \quad a_n \geq R\big].$$

(iii) Für jede stetige Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist das Bild $f(\mathbb{R}) = \{f(x)\colon x \in \mathbb{R}\}$ ein Intervall.

(iv) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{e}^{1/n} - 1)$ konvergiert.

20 P. **Aufgabe 3** —— Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig und beschränkt. Zeigen Sie, dass dann auch e^f auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig stetig ist.

20 P. **Aufgabe 4** —— Entscheiden Sie ohne Begründung für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Schreiben Sie hierfür ein w für "wahr" bzw. ein f für "falsch" in den Kasten vor der Aussage.

☐ Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ konvergiert.

☐ Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ konvergiert.

☐ Die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = \sin x$ für $x \leq 0$ und $f(x) = x$ für $x > 0$, ist differenzierbar.

☐ Die Funktion $f\colon [1, \infty) \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) = x^2 \log x$, ist konvex.

Bewertung: Jede richtige Antwort erhält fünf Punkte, für jede falsche werden zwei Punkte abgezogen, bei Offenlassen werden weder Punkte gegeben noch abgezogen, und negative Gesamtpunktzahlen werden zu Null gesetzt.

20 P. **Aufgabe 5** ——

(i) Berechnen Sie die Grenzwerte

$$\text{(a)} \quad \lim_{x\to\infty} x \log \frac{x+1}{x-1}, \qquad \text{(b)} \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x \sin x}.$$

(ii) Ermitteln Sie die Ableitungen von

$$f(x) = x^{(x^x)} \qquad \text{und} \qquad g(x) = x^{\frac{1}{x}\log x}.$$