Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2005/06

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG
Dr. W. QUAPP, S. HOFMANN
S. HOHLOCH, G. NOETZEL

Wahrscheinlichkeitstheorie II: Übungsblatt 2

Abgabe in den Übungen vom 27. Oktober bis 1. November 2005

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und sei $\mathcal{A}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{F}$.

AUFGABE 2.1 (BEDINGTE CAUCHY-SCHWARZ-UNGLEICHUNG) Zeigen Sie, dass für alle quadratintegrierbaren Zufallsgrößen X, Y gilt:

$$\mathbb{E}[XY \mid \mathcal{A}]^2 \leq \mathbb{E}[X^2 \mid \mathcal{A}]\,\mathbb{E}[Y^2 \mid \mathcal{A}].$$

4 Punkte

AUFGABE 2.2 (REDUKTION DER VARIANZ) Es sei X eine quadratintegrierbare Zufallsgröße. Zeigen Sie, dass die Varianz von $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{A}]$ nicht größer ist als die von X.

2 Punkte

AUFGABE 2.3 Sei $n \in \mathbb{N}$ fest, und sei $\mathfrak{S}_n$ die Menge aller Permutationen von $1, \dots, n$. Wir erinnern daran, dass $\mathcal{B}_n$ die Borel-σ-Algebra auf dem $\mathbb{R}^n$ ist. Betrachte das System

$$\mathcal{A} = \big\{A \in \mathcal{B}_n \colon \forall\, \sigma \in \mathfrak{S}_n \text{ gilt } (x_1, \dots, x_n) \in A \Longrightarrow (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \in A\big\}.$$

Wir betrachten den Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \mathbb{P})$, wobei $\mathbb{P} = \mu^{\otimes n}$ das n-fache Produktmaß des Wahrscheinlichkeitsmaßes μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ ist.

1. Zeigen Sie, dass $\mathcal{A}$ eine Teil-σ-Algebra von $\mathcal{B}_n$ ist.
2. Zeigen Sie, dass für jede Zufallsgröße $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P})$ die Abbildung

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} X\big(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}\big)$$

   fast sicher gleich dem bedingten Erwartungswert von X gegeben $\mathcal{A}$ ist.

5 Punkte

AUFGABE 2.4 Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ mit Lebesgue-Dichte f, und sei $Y \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Ferner sei

$$\mathcal{C} = \big\{D \cup (-D) \colon D \in \mathcal{B}([0, \infty))\big\}$$

die σ-Algebra der am Nullpunkt gespiegelten Mengen, wobei $\mathcal{B}([0, \infty))$ die Spur-Borel-σ-Algebra auf $[0, \infty)$ sei und $(-D) = \{-x \colon x \in D\}$. Betrachte die Zufallsgröße Z, definiert durch

$$Z(x) = \begin{cases} \frac{Y(x)f(x) + Y(-x)f(-x)}{f(x) + f(-x)}, & \text{falls } f(x) + f(-x) > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

1. Zeigen Sie, dass $Z = \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{C}]$ fast sicher.
2. Bestimmen Sie $\mathbb{P}([1, 3] \mid \mathcal{C})$ in dem Fall, wo f eine gerade Funktion ist.

5 Punkte