Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2005/06

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG
Dr. W. QUAPP, S. HOFMANN
S. HOHLOCH, G. NOETZEL

Wahrscheinlichkeitstheorie II: Übungsblatt 11

Abgabe in den Übungen vom 16. und 17. Januar 2006

AUFGABE 11.1 (GEBURTS– UND TODESPROZESSE) Sei $N \in \mathbb{N}$ fest und $P = (p_{i,j})_{i,j \in I}$ eine stochastische Matrix auf $I = \{1, \dots, N\}$ mit $p_{i,j} > 0$, falls $|i - j| = 1$, und $p_{i,j} = 0$, falls $|i - j| \geq 2$. Zeigen Sie, dass P reversibel ist.

4 Punkte

AUFGABE 11.2 (VARIANTE DES POLYA-MODELLS) Es sei $N \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ fest, und es sei eine Urne gegeben, die höchstens N Kugeln fasst. Wir betrachten Kugeln in der Urne in den Farben weiß und schwarz; von jeder dieser Farben liege immer mindestens eine Kugel in der Urne. Falls weniger als N Kugeln in der Urne liegen, so wird zufällig mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine der Kugeln gezogen und zusammen mit einer neuen Kugel der selben Farbe in die Urne zurück gelegt. Falls die Urne N Kugeln hat, so wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ nichts getan, und ansonsten werden alle Kugeln bis auf je eine weiße und eine schwarze aus der Urne entfernt.
Seien W_n beziehungsweise S_n die Anzahl der weißen und schwarzen Kugeln in der Urne nach der n-ten Durchführung dieses Verfahrens. Es ist leicht zu sehen, dass (W_n, S_n) eine Markovkette auf $I = \{1, \dots, N\}^2$ ist. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix dieser Markovkette, klären Sie, ob sie eine asymptotische Verteilung hat, und ermitteln Sie diese Verteilung gegebenenfalls.

4 Punkte

AUFGABE 11.3 (GIBBS-SAMPLER) Sei $\Lambda = \{-N, \dots, N\}^d \subset \mathbb{Z}^d$ ein endliches Gitter der Länge $2N$. Wir betrachten die Menge I aller Abbildungen $\Lambda \to \{0, 1\}$ (genannt 'zulässige Konfigurationen'), die keinen zwei benachbarten Gitterpunkten der Wert 1 zuordnet. Eine Markovkette auf I sei über folgenden Zufallsmechanismus definiert: Wähle mit Gleichwahrscheinlichkeit ein $x \in \Lambda$ aus. Falls die Konfiguration in allen Nachbarn von x den Wert 0 besitzt, flippe den Wert in x mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$, sonst lasse ihn unverändert. Falls mindestens einem Nachbarn von x der Wert 1 zugeordnet ist, geschieht nichts.

1. Geben Sie die Übergangswahrscheinlichkeiten der so definierten Markovkette formal an.
2. Zeigen Sie, dass die Markovkette irreduzibel und aperiodisch ist.
3. Beweisen Sie, dass die Gleichverteilung auf I reversibel ist.

Hinweis: Die Gleichverteilung auf I dient als stochastisches Modell für das zufällige Auftreten von sich gegenseitig abstoßenden Molekülen auf einem Gitter. Obige Markovkette kann dazu benutzt werden, diese Verteilung zu simulieren.

4 Punkte

AUFGABE 11.4 Es sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsgrößen, und es sei $(M_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein nichtnegatives Martingal, d. h., für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei $M_n \geq 0$ integrierbar und messbar bezüglich $\sigma(X_1, \dots, X_n)$ mit $\mathbb{E}[M_n \mid X_1, \dots, X_{n-1}] = M_{n-1}$. Es sei $M_0 = 1$. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_n$ durch die Dichte $\frac{\mathrm{d}\mathbb{P}_n}{\mathrm{d}\mathbb{P}} = M_n$. Zeigen Sie, dass die Folge der Verteilungen von $(X_1, \dots, X_n)$ unter $\mathbb{P}_n$ konsistent ist.

4 Punkte