Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2005/06

Prof. Dr. WOLFGANG KÖNIG
Dr. W. QUAPP, S. HOFMANN
S. HOHLOCH, G. NOETZEL

Wahrscheinlichkeitstheorie II: Übungsblatt 10

Abgabe in den Übungen vom 9. und 10. Januar 2006

AUFGABE 10.1 Seien S und T Stoppzeiten. Beweisen Sie:

(i) $S + T$ ist eine Stoppzeit.

(ii) Falls zusätzlich $S \leq T$ gilt, ist jedes Prä-S-Ereignis auch ein Prä-T-Ereignis.

4 Punkte

AUFGABE 10.2 Sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine positiv rekurrente Markovkette auf $\mathbb{N}$ mit Übergangsmatrix $P = (p_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ und invarianter Verteilung $\mu = (\mu(i))_{i\in\mathbb{N}}$. Ferner sei $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei $\tau_n = \inf\{k \in \mathbb{N}_0 \colon S_k > n\}$ der Zeitpunkt, an dem der Prozeß $(S_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ den Punkt n überschreitet. Sie dürfen benutzen, daß der Prozeß $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit $Y_n = (X_{\tau_n}, S_{\tau_n} - n)$ eine Markovkette auf $I = \{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \colon j \leq i\}$ ist, und dass ihre Übergangswahrscheinlichkeiten gegeben sind durch

$$q_{(i_1,j_1),(i_2,j_2)} = \begin{cases} p_{i_1,i_2}\delta_{i_2,j_2} & \text{falls } j_1 = 1, \\ \delta_{i_1,i_2}\delta_{j_1,j_2+1} & \text{sonst.} \end{cases}$$

Es ist dann klar (wenn auch der formale Beweis lästig ist), dass $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ irreduzibel und aperiodisch ist.

(i) Geben Sie ein handliches äquivalentes Kriterium für die Existenz einer invarianten Verteilung ν der Kette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, und ermitteln Sie sie in diesem Fall.

(ii) Wir betrachten die Wahrscheinlichkeit $u_n = \mathbb{P}(\text{es gibt ein } k \in \mathbb{N} \text{ mit } S_k = n)$ in dem Fall, dass ν existiert. Geben Sie eine intuitive Vermutung, wogegen u_n für $n \to \infty$ konvergieren sollte, und ermitteln Sie den Grenzwert anschließend mit Hilfe der positiven Rekurrenz der Kette $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

Hinweise: In (i) stelle man ein Gleichungssystem auf und löse es sukzessive. In (ii) drücke man das betrachtete Ereignis mit Hilfe von Y_n aus.

4 Punkte

AUFGABE 10.3 Gegeben sei die folgende stochastische Matrix auf $I = \{1, \dots, 5\}$:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{5}{8} & 0 & 0 & \frac{3}{8} & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die mittlere Rückkehrzeit der zugehörigen Markovkette in jedem Punkt aus I.

4 Punkte

AUFGABE 10.4 (POSITIVE REKURRENZ EINER IRRFAHRT AUF $\mathbb{N}_0$) Mit Parametern $p_0, p_1, \dots \in (0,1)$ sei die stochastische Matrix $P = (p_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}_0}$ gegeben durch

$$p_{i,j} = \begin{cases} p_i, & \text{falls } j = i+1, \\ 1-p_i, & \text{falls } i \geq 1, \text{ und } j = i-1, \\ 1-p_0, & \text{falls } i = j = 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Definiere

$$\varrho_0 = 1 \qquad \text{und} \qquad \varrho_k = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{p_i}{1-p_{i+1}} \quad \text{für } k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

(i) Zeigen Sie, dass P aperiodisch und irreduzibel ist.

(ii) Zeigen Sie, dass P genau dann positiv rekurrent ist, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} \varrho_k < \infty$ gilt. Ermitteln Sie in diesem Fall die invariante Verteilung.

(iii) Sei $(S_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die eindimensionale Irrfahrt mit Start in 1, deren Schritte $S_{n+1} - S_n$ unabhängig sind und die Werte 1 und -1 mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ bzw. $1-p$ annehmen. Benutzen Sie Ihr Ergebnis aus (ii), um die erwartete Zeit des ersten Besuches in 0 zu ermitteln.

4 Punkte