Untere Schranken für Mischzeiten

Christopher Tili

Sommersemester 2016

Seminararbeit

Moderne Anwendungen der Theorie der Markovketten

Prof. Dr. Wolfgang König
Priv. Doz. Dr. Konstantin Fackeldey
Technische Universität Berlin

Zusammenfassung

Es ist bekanntermaßen nicht immer die leichteste Übung, zu einer gegebenen Markovkette mit invarianter Verteilung die Mischzeit exakt zu bestimmen. Um aber trotzdem eine Idee für die Größenordnung der Mischzeit zu erhalten, gibt es Konzepte zur Bestimmung von oberen sowie unteren Schranken. Diese Konzepte unterscheiden sich stellenweise stark von einander, da ihnen oft schon im Ansatz verschiedene Ideen zu Grunde liegen oder sie gar nur für eine bestimmte Art von Markovketten anwendbar sind.
Ziel dieser Seminararbeit ist es, vier solcher Methoden zur Berechnung einer unteren Schranke für die Mischzeit einer Markovkette zu liefern. Wir werden für jede dieser Schranken sehen, welche Idee zu dieser Schranke führte und auf welche Markovketten diese anwendbar ist. Abschließend wenden wir alle erarbeiteten Theoreme auf ein konkretes Beispiel an, welches alle nötigen Voraussetzungen erfüllen wird, um die tatsächliche Berechnung in der Praxis zu erleben.

Quelle: 'Markov Chains and Mixing Times'; D. Levin, Y. Peres, E. Wilmer

Im Folgenden betrachten wir stets eine Markovkette $(X_t)_{t\in\mathbb{N}}$ in diskreter Zeit auf dem endlichen Zustandsraum Ω. Die zugehörige Übergangsmatrix P sei stets irreduzibel und aperiodisch und π sei die invariante/stationäre Verteilung der Kette. Die Notation $||\cdot||$ bezeichne hier ausschließlich den Totalvariationsabstand. Erinnern wir noch einmal die Definition der Mischzeit und starten dann mit der ersten unteren Schranke.

Definition 0.1. *(Mischzeit einer Markovkette)*
Zu einem selbstgewählten $\epsilon \in]0,1[$ ist die Mischzeit definiert als

$$t_{\text{mix}}(\epsilon) := \min\{t : d(t) \leq \epsilon\},$$

wobei $d(t) := \max_{x\in\Omega} ||P^t(x,\cdot) - \pi||$.

1 Zählschranke

Beginnen wir mit einer relativ universell anwendbaren und schnell ermittelten Schranke. Allerdings benötigt die sogenannte Zählschranke eine weitere Voraussetzung, die den Anwendungsbereich doch deutlich reduziert. Wir können diese Schranke nur für Markovketten ermitteln, deren invariante Verteilung die Gleichverteilung auf Ω ist.
Die Idee dabei, ist folgende: Wenn nach t Schritten die Anzahl der möglichen Zustände der Markovkette nicht annähernd Ω entspricht, dann kann die Verteilung zum Zeitpunkt t natürlich noch nicht nah der Gleichverteilung, also der invarianten Verteilung, sein. Dieses t kann also nicht die Mischzeit sein. Wir definieren zunächst die Menge aller erreichbaren Zustände von einem Punkt aus.

Definition 1.1.

$$d_{\text{out}}(x) := |\{y : P(x,y) > 0\}| \quad \textit{und} \quad \Delta := \max_{x\in\Omega} d_{\text{out}}(x).$$

Uns genügt die Größe des Zustandsraums und, die eben definierte, maximale Anzahl an erreichbaren Zuständen von einem Punkt aus, um folgendes Theorem zu formulieren.

Theorem 1.2. *(Zählschranke)*

$$t_{\text{mix}}(\epsilon) \geq \frac{\log(|\Omega|(1-\epsilon))}{\log \Delta}.$$

Beweis.
Es sei $\Omega_t^x := \{y : P^t(x,y) > 0\}$ die Menge aller erreichbaren Zustände in t Schritten vom Punkt x aus.
Es ist klar, dass dann $|\Omega_t^x| \leq \underbrace{\Delta * ... * \Delta}_{t\text{-mal}} = \Delta^t$.
Sei $\epsilon \in]0,1[$ beliebig aber fest. Falls $\Delta^t < (1-\epsilon)|\Omega|$ gilt:

$$||P^t(x,\cdot) - \pi|| = \sup_{A\subseteq\Omega} |P^t(x,A) - \pi(A)| \geq \underbrace{P^t(x,\Omega_t^x)}_{=1} - \underbrace{\pi(\Omega_t^x)}_{=\frac{|\Omega_t^x|}{|\Omega|}}$$

$$\geq 1 - \frac{\Delta^t}{|\Omega|} > \epsilon, \text{ nach Voraussetzung.}$$

Es gilt also: $\Delta^t < (1-\epsilon)|\Omega| \quad \Rightarrow \quad ||P^t(x,\cdot) - \pi|| > \epsilon$
bzw. äquivalent: $||P^t(x,\cdot) - \pi|| \leq \epsilon \quad \Rightarrow \quad \Delta^t \geq (1-\epsilon)|\Omega|$
$t_{\text{mix}}(\epsilon)$ erfüllt nach der Definition der Mischzeit offensichtlich die linke Ungleichung, womit gilt: $\Delta^{t_{\text{mix}}(\epsilon)} \geq (1-\epsilon)|\Omega|$.
Und damit folgt die Behauptung nach elementaren Umformungen und Anwenden vom Logarithmus. □

Die Zählschranke wird unter anderem benutzt, um die Mischzeit des Riffle Shuffle beim Kartenmischen nach unten zu begrenzen. Aber auch elementare mehrdimensionale Irrfahrten eignen sich für diese Schranke.
Eine konkrete Berechnung findet sich in Abschnitt 5.

2 Durchmesser-Schranke

Für die folgenden Schranken können wir die zusätzliche Voraussetzung der Zählschranke, bezüglich der invarianten Verteilung, wieder verwerfen.
Bevor wir den Begriff des Durchmessers einer Markovkette definieren können, müssen wir den Graphen der Kette verallgemeinern. Dazu konstruieren wir einen ungerichteten Graphen mit der Knotenmenge Ω und fügen jeweils die Kante $\{x, y\}$ hinzu, falls $P(x, y)$ oder $P(y, x) > 0$. Wir bezeichnen dann den maximalen Abstand zweier Knoten, also den Durchmesser des Graphen, als den *Durchmesser* der Markovkette. Wobei "maximaler Abstand" bedeutet, dass wir über alle kürzesten Verbindungen der Knoten zueinander nach dem Maximum suchen.
Das allein genügt, um das folgende schwache, aber schnell ermittelte, Resultat zu erhalten.

Theorem 2.1. *(Durchmesser-Schranke)*
Sei L der Durchmesser der Markovkette, und $\epsilon < 1/2$, dann gilt

$$t_{\text{mix}}(\epsilon) \geq L/2.$$

Beweis.
Seien x_0 und y_0 Zustände mit Abstand L. Diese sind dann also mindestens L Schritte der Markovkette von einander entfernt - falls sie sich überhaupt treffen würden.
$\Rightarrow \quad P^{\lfloor (L-1)/2 \rfloor}(x_0, \cdot)$ und $P^{\lfloor (L-1)/2 \rfloor}(y_0, \cdot)$ sind positiv auf disjunkten Mengen.
$\Rightarrow \quad \overline{d}(\lfloor (L-1)/2 \rfloor) = \max_{x,y \in \Omega} ||P^{\lfloor (L-1)/2 \rfloor}(x, \cdot) - P^{\lfloor (L-1)/2 \rfloor}(y, \cdot)|| \overset{x_0, y_0}{=} 1$
Da $d(t)$ und $\overline{d}(t)$ monoton fallend sind, ist klar, dass
$\overline{d}(t) = 1 \quad \forall t \leq \lfloor (L-1)/2 \rfloor$.
Weiterhin gilt stets $d(t_{\text{mix}}(\epsilon)) \leq \epsilon$ und $\overline{d}(t) \leq 2d(t)$. Also $\overline{d}(t_{\text{mix}}(\epsilon)) \leq 2\epsilon$.
Haben also gezeigt: $t_{\text{mix}}(\epsilon) \leq \lfloor (L-1)/2 \rfloor \quad \Rightarrow \quad \epsilon \geq \frac{1}{2}$.
bzw. äquivalent: $\epsilon < \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad t_{\text{mix}}(\epsilon) > \lfloor (L-1)/2 \rfloor$
$\Rightarrow \quad t_{\text{mix}}(\epsilon) \geq \lfloor (L-1)/2 \rfloor + 1 \geq L/2$. □

Für die Durchmesser-Schranke gibt es eigentlich keine typischen Anwendungsbereiche, was sicherlich auch daran liegt, dass sich die Güte der Schranke nicht mit Hilfe des ϵ regulieren lässt. Nichtsdestotrotz lässt sich keine untere Grenze so schnell und simpel berechnen wie diese, sofern sich ein Graph zu gegebenem Zustandsraum visualisieren lässt.
Auch zu diesem Abschnitt folgt eine konkrete Berechnung in Abschnitt 5.

3 Flaschenhals-Verhältnis

Wir stellen uns vor, dass eine Markovkette vorliegt, die auf einem Zustandsraum wirkt, bei dem größere Teile des Raumes durch einen Engpass von einander getrennt sind (siehe Abb. 1). Dadurch wird die Konvergenzgeschwindigkeit natürlich gehemmt. Um diesen Umstand zu nutzen, benötigen wir zunächst die folgenden Definitionen und können im Anschluss direkt die Schranke angeben.

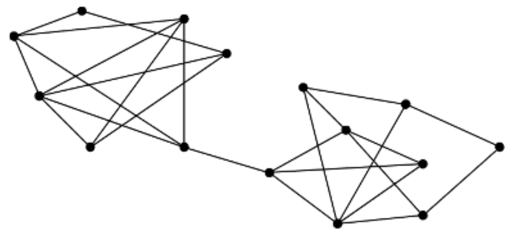

Abbildung 1: Skizze für den Graph einer Markovkette mit Flaschenhals

Definition 3.1. *(Kanten-Maß)*

$$Q(x,y) := \pi(x)P(x,y), \quad Q(A,B) = \sum_{x\in A, y\in B} Q(x,y).$$

Gemäß der Definition ist $Q(A,B)$ hier also die Wahrscheinlichkeit, mit einem Schritt von A nach B zu kommen, wenn wir in der invarianten Verteilung starten.

Definition 3.2. *(Flaschenhals-Verhältnis)*

$$\begin{aligned} &\textit{Flaschenhals-Verhältnis der Menge } S \subset \Omega && \Phi(S) := \frac{Q(S,S^{\mathrm{c}})}{\pi(S)}, \\ &\textit{Flaschenhals-Verhältnis der Markovkette} && \Phi_\star := \min_{S:\ \pi(S)\le\frac{1}{2}} \Phi(S). \end{aligned}$$

Theorem 3.3. *(Flaschenhals-Verhältnis)*

$$t_{\mathrm{mix}}(\epsilon) \geq \left(\frac{1}{2} - \epsilon\right)\frac{1}{\Phi_\star}.$$

Beweis.
Setze zunächst $\pi_S(A) = \pi(A\cap S)$ und $\mu_S(A) = \frac{\pi_S(A)}{\pi(S)}$.
Die erste Idee ist $(\star)$ $\quad \pi(S)||\mu_S P - \mu_S||$ $\quad$ als $Q(S,S^{\mathrm{c}})$ zu identifizieren. Dazu benutzen wir die folgenden zwei Bemerkungen (i) und (ii):

(i) Es gilt: $\quad \pi(S)||\mu_S P - \mu_S|| = \pi(S) \sum_{\mu_s P(y)\geq \mu_s(y)} \big(\mu_s P(y) - \mu_s(y)\big).$

und per Definition ist $\pi_S(y) = \pi(S)\mu_S(y)$ bzw. $\pi_S P(y) = \pi(S)\mu_S P(y)$.
Womit außerdem $\mu_S P(y) \geq \mu_S(y) \quad \Leftrightarrow \quad \pi_S P(y) \geq \pi_S(y)$.

(ii) $\pi_S(y)$ ist nur positiv für $y \in S$ und dann ist $\pi_S(y) = \pi(y)$. Für $y \in \Omega$:

$$\pi_S P(y) = \sum_{x\in\Omega} \pi_S(x)P(x,y) = \sum_{x\in S} \pi(x)P(x,y) \leq \sum_{x\in\Omega} \pi(x)P(x,y) \overset{\text{inv.}}{=} \pi(y).$$

Für $y \in S$ war aber $\pi_S(y) = \pi(y)$, also $\pi_S P(y) \leq \pi_S(y) \quad \forall y \in S$.
und andererseits $\pi_S(y) = 0 \leq \pi_S P(y) \quad \forall y \in S^{\mathrm{c}}$.

Betrachte mit diesen Zwischenergebnissen noch einmal $(\star)$

$$\begin{aligned}
\pi(S)||\mu_S P - \mu_S|| &\overset{(i)}{=} \pi(S) \sum_{\mu_s P(y) \geq \mu_s(y)} \big(\mu_s P(y) - \mu_s(y)\big) \\
&\overset{(i)}{=} \sum_{\pi_s P(y) \geq \pi_s(y)} \big(\pi_s P(y) - \pi_s(y)\big) \\
&\overset{(ii)}{=} \sum_{y\in S^{\mathrm{c}}} \big(\pi_s P(y) - \pi_s(y)\big) \overset{\pi_S(y)=0}{=} \sum_{y\in S^{\mathrm{c}}} \pi_s P(y) \\
&\overset{(ii)}{=} \sum_{y\in S^{\mathrm{c}}} \sum_{x\in S} \pi(x)P(x,y) = \sum_{x\in S, y\in S^{\mathrm{c}}} Q(x,y) = Q(S,S^{\mathrm{c}}).
\end{aligned}$$

$\Rightarrow ||\mu_S P - \mu_S|| = \Phi(S)$.
Eine Eigenschaft der Totalvariation liefert: $||\mu_S P - \mu_S|| \geq ||\mu_S P^{k+1} - \mu_S P^k||$.
Mit Hilfe der Teleskopsumme $\mu_S P^t - \mu_S = \sum_{k=0}^{t-1} \big(\mu_S P^{k+1} - \mu_S P^k\big)$ folgt:
$||\mu_S P^t - \mu_S|| \overset{\Delta}{\leq} \sum_{k=0}^{t-1} ||\mu_S P^{k+1} - \mu_S P^k|| \leq \sum_{k=0}^{t-1} \Phi(S) = t\Phi(S) \quad (\star\star)$.

Gemäß der Definition von $\Phi_\star$ sei ab hier $\pi(S) \leq \frac{1}{2}$
$\Rightarrow \quad ||\mu_S - \pi|| \geq \pi(S^{\mathrm{c}}) - \mu_S(S^{\mathrm{c}}) = \pi(S^{\mathrm{c}}) = 1 - \pi(S) \geq \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq ||\mu_S - \pi|| \overset{\Delta}{\leq} ||\mu_S - \mu_S P^t|| + ||\mu_S P^t - \pi|| \overset{(\star\star)}{\leq} t\Phi(S) + ||\mu_S P^t - \pi||$$

Also gilt für $t = t_{\mathrm{mix}}(\epsilon)$: $\frac{1}{2} \leq t_{\mathrm{mix}}(\epsilon)\Phi(S) + \epsilon$
$\Rightarrow \quad \big(\frac{1}{2} - \epsilon\big)\frac{1}{\Phi(S)} \leq t_{\mathrm{mix}}(\epsilon)$.
Wobei die Schranke nur schärfer wird, wenn wir $\Phi(S)$ über S minimieren. $\square$

Mit Hilfe des Flaschenhals-Verhältnisses lassen sich besonders Markovketten auf geometrischen Strukturen, wie zusammengeklebte Tori oder ein binärer Baum, beschreiben.
Für ein Beispiel sei an dieser Stelle erneut auf Abschnitt 5 verwiesen.

4 Unter Reversibilität

Auch wenn die Schranke in diesem Abschnitt keinen konkreten Namen hat, verdient sie Aufmerksamkeit. Darüber hinaus kommt hier noch einmal ein ganz anderer Ansatz zum Tragen: Die Berechnung erfolgt mittels Eigenwerte der Übergangsmatrix P. Allerdings kommt diese, vermutlich stärkste, Schranke dieser Arbeit nicht ohne eine weitere Voraussetzung aus: Die invariante Verteilung π sei für diesen Abschnitt sogar reversibel. Vergegenwärtigen wir nochmal diese Eigenschaft.

Definition 4.1. *(Reversible Verteilung)*
Die invariante Verteilung π der Markovkette heißt reversibel*, falls*

$$\pi(x)P(x,y) = \pi(y)P(y,x) \quad \forall x, y \in \Omega$$

Insbesondere folgt aus Reversibilität die Stationarität.

Für die entscheidende Definition der *Relaxationszeit* und dem Beweis der Schranke, benötigen wir noch ein wenig Kenntnis über die Eigenwerte von Übergangsmatrizen. Dazu dient das folgende Lemma, dessen Aussagen hier nicht bewiesen werden.

Lemma 4.2. *(Eigenwerte von P)*

- *(i)* $\lambda = 1$ *ist EW von P und damit* $f = (1 \,...\, 1)^T$ *ein EV*
- *(ii)* *Für alle EW von P gilt* $|\lambda| \leq 1$
- *(iii)* *P irreduzibel* $\Rightarrow$ *EW* $\lambda = 1$ *hat algebraische Vielfachheit* 1
- *(iv)* *P irreduzibel & aperiodisch* $\Rightarrow$ *EW* $\lambda = 1$ *ist einziger mit* $|\lambda| = 1$
- *(v)* *P irreduzibel & reversibel* $\Rightarrow$ *Alle EW von P sind reell*
- *(vi)* *P reversibel* $\Rightarrow$ *EV orthogonal bezüglich* $\langle f, g\rangle_\pi := \sum_{j\in\Omega} \pi(j) f(j) g(j)$.

Beweis. Ohne Beweis. (Nachzulesen in der Quelle) □

Definition 4.3. *(Relaxationszeit)*
Sei P die Übergangsmatrix einer reversiblen Markovkette. Man ordne die Eigenwerte von P

$$1 = \lambda_1 > \lambda_2 > ... > \lambda_{|\Omega|} \geq -1 \qquad \textit{mit} \qquad \lambda_\star := \max\{|\lambda_2|, |\lambda_{|\Omega|}|\}$$

und definiere dazu

$$\gamma_\star := 1 - \lambda_\star \qquad \textit{als die absolute Spektrallücke von } P$$
$$t_{\text{rel}} := \frac{1}{\gamma_\star} \qquad \textit{als die Relaxationszeit der Markovkette.}$$

Sollte sich die Übergangsmatrix explizit angeben lassen, ist es, mit Hilfe von Matlab beispielsweise, ein Leichtes die Eigenwerte zu ermitteln. Damit lässt sich dann direkt eine Eingrenzung für die Mischzeit der Markovkette geben, wie folgendes Theorem zeigt.

Theorem 4.4. *(Unter Reversibilität)*
Für eine irreduzible, aperiodische und reversible Markovkette gilt

$$t_{\text{mix}}(\epsilon) \geq (t_{\text{rel}} - 1) \log\left(\frac{1}{2\epsilon}\right).$$

Beweis.
Sei f ein Eigenvektor von P zum Eigenwert $\lambda \neq 1 \quad \Rightarrow \quad Pf = \lambda f$.
Nach dem Lemma ist $g = (1 \ldots 1)^T$ stets Eigenvektor von P und orthogonal zu f.
$\Rightarrow \quad \langle f, g\rangle_\pi = \sum_{j\in\Omega} \pi(j)f(j) = 0.$

$$\begin{aligned}
\overset{\forall t}{\Rightarrow} \quad |\lambda^t f(x)| &= |P^t f(x)| = |\sum_{y\in\Omega} \big(P^t(x,y)f(y) - \pi(y)f(y)| \\
&\leq \sum_{y\in\Omega} |f(y)||P^t(x,y) - \pi(y)| \leq ||f||_\infty \sum_{y\in\Omega} |P^t(x,y) - \pi(y)| \\
&\overset{\text{TV}}{=} ||f||_\infty 2||P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)||
\end{aligned}$$

Nehme jetzt x gerade sodass $|f(x)| = ||f||_\infty$
$\Rightarrow \quad |\lambda|^t \leq 2||P^t(x,\cdot) - \pi(\cdot)|| \leq 2d(t) \quad \forall t$
Setze nun $|\lambda| = \lambda_\star$ aus der Definition der Relaxationszeit
$\Rightarrow \quad \lambda_\star^t \leq 2d(t) \quad \forall t$
$\Rightarrow \quad \lambda_\star^{t_{\text{mix}}(\epsilon)} \leq 2d(t_{\text{mix}}(\epsilon)) \leq 2\epsilon$
$\Rightarrow \quad t_{\text{mix}}(\epsilon) \underbrace{\log\big(\frac{1}{\lambda_\star}\big)}_{\leq \frac{1}{\lambda_\star} - 1} \geq \log(\frac{1}{2\epsilon})$
$\Rightarrow \quad t_{\text{mix}}(\epsilon) \geq \log\big(\frac{1}{2\epsilon}\big)\frac{\lambda_\star}{1-\lambda_\star} = \log\big(\frac{1}{2\epsilon}\big)(t_{\text{rel}} - 1).$ □

Natürlich lässt sich abschließend nicht eindeutig herausstellen, welche Schranke die beste ist. Jedes der vorgestellten Theoreme kann auf einer bestimmten Markovkette zu der jeweils schärfsten Aussage führen. Es gilt stets, anhand der gegebenen Eigenschaften, abzuwägen, welche Schranke anzuwenden ist und gegebenenfalls die Resultate zu vergleichen. Sicherlich könnte man behaupten, dass unter Reversibilität die letzte Schranke nahezu optimal ist. Dafür ist diese schon nicht mehr anwendbar, wenn nur Stationarität vorliegt.
Im letzten Abschnitt betrachten wir zu guter Letzt ein einfaches Rechenbeispiel zu allen vorgestellten unteren Schranken für die Mischzeit von Markovketten.

5 Ein Beispiel

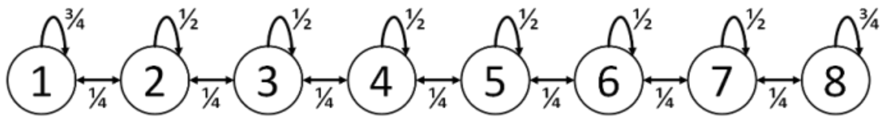

Abbildung 2: Träge Irrfahrt auf der Menge $[1, 8] \cap \mathbb{N}$

Wir betrachten ein einfaches Beispiel einer diskreten Markovkette (siehe Abb. 2), das aber den Vorteil hat, sämtliche Voraussetzungen der vorigen Abschnitte zu erfüllen. Darüber hinaus lassen sich konkrete Werte ermitteln. Man macht sich schnell klar, dass diese Markovkette irreduzibel und aperiodisch ist (dank der Möglichkeit im Zustand zu verweilen). Zudem ist die invariante Verteilung sogar reversibel und entspricht der Gleichverteilung auf $\{1, ..., 8\}$, da

$$\pi(x)P(x,y) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \pi(y)P(y,x) \quad \forall x, y \text{ mit Abstand 1.}$$

Berechnen wir also jeweils die Schranken für die Mischzeit dieser Markovkette mit Hilfe der vier vorgestellten Theoreme zu festem $\epsilon = \frac{1}{4}$.

5.1 Zählschranke

$$\text{Es gilt} \quad t_{\text{mix}}\left(\frac{1}{4}\right) \geq \frac{\log(8 \times \frac{3}{4})}{\log(3)} = 1,63.$$

5.2 Durchmesser-Schranke

$$\text{Es gilt} \quad t_{\text{mix}}\left(\frac{1}{4}\right) \geq \frac{7}{2} = 3,5.$$

5.3 Flaschenhals-Verhältnis

Zunächst gilt $Q(x,y) = \pi(x)P(x,y) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32} \quad \forall x, y$ mit Abstand 1. Um $\Phi_\star$ zu bestimmen, minimieren wir $\Phi(S)$ über alle S mit $\pi(S) \leq \frac{1}{2}$. Das heißt, wir minimieren $Q(S, S^c)$ und maximieren $\pi(S)$. Man überlegt sich, dass es minimal ist für $Q(S, S^c)$, wenn S und S^c nur eine Stelle haben, an der sie verbunden sind. Da π die Gleichverteilung ist, ist es maximal $|S| = 4$ zu wählen. Diese Überlegungen führen zu der Feststellung, dass $S = \{1, ..., 4\}$ oder das Komplement gerade $\Phi(S)$ minimieren. Also $\Phi_\star = \frac{1}{32}/\frac{4}{8} = \frac{1}{16}$.

$$\text{Es gilt} \quad t_{\text{mix}}\left(\frac{1}{4}\right) \geq \frac{1}{4\Phi_\star} = 4.$$

5.4 Unter Reversibilität

Mit Hilfe von Matlab lassen sich die Eigenwerte ermitteln und damit $\lambda_\star$. Das führt sofort zur Relaxationszeit.

$$\text{Es gilt} \quad t_{\text{mix}}\left(\frac{1}{4}\right) \geq 25,32 \times \log(2) = 17,55.$$

5.5 Tatsächliche Mischzeit

Wir sehen, dass die ersten drei unteren Schranken hier wenig zur Eingrenzung der Mischzeit beitragen, wenn man bedenkt, dass es allein schon sieben Schritte der Markovkette benötigt, um überhaupt mit positiver Wahrscheinlichkeit von Zustand 1 nach 8 zu kommen. Wir wissen mit Hilfe der letzten Schranke, dass die Mischzeit also mindestens 18 beträgt. Doch wie hoch ist sie genau?
In diesem Fall stellt man fest, dass

$$d(t) = \max_{x\in\Omega} \sup_{A\subseteq\Omega} |P^t(x,A) - \pi(A)| \overset{x=1}{=} \sup_{A\subseteq\Omega} |P^t(1,A) - \frac{|A|}{8}| \quad \forall t$$

Damit lässt sich numerisch ermitteln, dass die Mischzeit zu $\epsilon = \frac{1}{4}$ tatsächlich bei 24 liegt.