Paradoxa in der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Wolfgang König

Universität Leipzig

Paradoxa – was sind das?

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Ein Paradoxon oder Paradox (Mehrzahl: Paradoxa oder Paradoxien) ist ein scheinbar oder tatsächlich unauflösbarer, unerwarteter Widerspruch.

Altgriechisch '$\pi\alpha\rho\alpha\delta o\xi o\nu$', von $\pi\alpha\rho\alpha =$ 'gegen-' und $\delta o\xi o\nu =$ 'Meinung', 'Ansicht'.

Paradoxa – was sind das?

Ein Paradoxon oder Paradox (Mehrzahl: Paradoxa oder Paradoxien) ist ein scheinbar oder tatsächlich unauflösbarer, unerwarteter Widerspruch.

Altgriechisch '$\pi\alpha\rho\alpha\delta o\xi o\nu$', von $\pi\alpha\rho\alpha =$ 'gegen-' und $\delta o\xi o\nu =$ 'Meinung', 'Ansicht'.

Ein paar logische Formen:

- Negation eines Selbstbezuges (z. B. 'Dieser Satz ist falsch.'),
- Stilfigur in der Rhetorik (z. B. 'Weniger ist mehr!'),
- Phänomene, die der Intuition widersprechen (z. B. Fragen nach (Un-)Endlichkeit von Raum und Zeit),
- Scheinbare Widersprüche, die sich bei genauerer Analyse auflösen.

Ein paar klassische Paradoxa

logische Paradoxa:

- Paradoxa des Zenon von Elea: Achilles und die Schildkröte, das Pfeil-Paradoxon
- Paradoxon des Epimenides (eines Kreters): ‘Alle Kreter lügen.’
- Paradoxon des Aristoteles: ‘Ich rasiere jeden, der sich nicht selbst rasiert.’ (Rasiert er sich oder nicht?)

Ein paar klassische Paradoxa

logische Paradoxa:

- Paradoxa des Zenon von Elea: Achilles und die Schildkröte, das Pfeil-Paradoxon
- Paradoxon des Epimenides (eines Kreters): ‘Alle Kreter lügen.’
- Paradoxon des Aristoteles: ‘Ich rasiere jeden, der sich nicht selbst rasiert.’ (Rasiert er sich oder nicht?)

mathematische Paradoxa:

- Banach-Tarski-Paradoxon: Verdoppelung des Volumens durch Zerteilung und neuer Zusammensetzung.
- Russell’sches Paradoxon: Enthält die Menge aller Mengen, die sich nicht selbst enthalten, sich selber?
- Currys Paradoxon: ‘Wenn dieser Satz wahr ist, dann gibt es den Weihnachtsmann.’ (beweist die Existenz des Weihnachtsmanns!)
- Gödels Unvollständigkeitssatz: ‘Jedes hinreichend mächtige formale System ist entweder widersprüchlich oder unvollständig.’ (D. h., die Widerspruchsfreiheit des Systems kann nicht innerhalb des Systems bewiesen werden.)

Ein Würfelparadoxon

Beim Würfeln mit zwei idealen Würfeln gibt es für die Augensummen 9 und 10 je zwei Möglichkeiten:

$$4+5=9=3+6 \qquad \text{und} \qquad 4+6=10=5+5.$$

Trotzdem ist die Summe 9 wahrscheinlicher.

Ein Würfelparadoxon

Beim Würfeln mit zwei idealen Würfeln gibt es für die Augensummen 9 und 10 je zwei Möglichkeiten:

$$4 + 5 = 9 = 3 + 6 \qquad \text{und} \qquad 4 + 6 = 10 = 5 + 5.$$

Trotzdem ist die Summe 9 wahrscheinlicher.

- simple Auflösung: Reihenfolge der Würfe muss beachtet werden.
- LEIBNIZ und D'ALEMBERT (1754) scheiterten, CARDANO (1560) und GALILEI (1620) nicht.

Ein Würfelparadoxon

Beim Würfeln mit zwei idealen Würfeln gibt es für die Augensummen 9 und 10 je zwei Möglichkeiten:

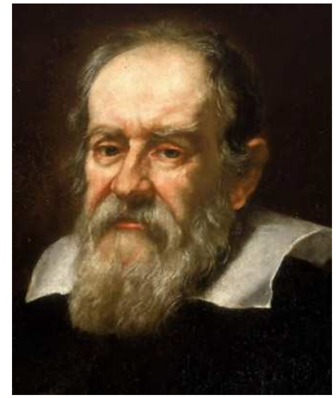
$$4 + 5 = 9 = 3 + 6 \qquad \text{und} \qquad 4 + 6 = 10 = 5 + 5.$$

Trotzdem ist die Summe 9 wahrscheinlicher.

- simple Auflösung: Reihenfolge der Würfe muss beachtet werden.
- LEIBNIZ und D'ALEMBERT (1754) scheiterten, CARDANO (1560) und GALILEI (1620) nicht.
- CARDANO: erstes Buch über Wahrscheinlichkeitsrechnung (*De Ludo Aleae*, 1663).

Die Akteure

GEROLAMO CARDANO (1501-1576)



GALILEO GALILEI (1564-1642)

JEAN-BAPTISTE LE ROND,

genannt D'ALEMBERT (1717-1783)

GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

(1646 (in Leipzig)-1716)

Das Aufteilungsparadoxon

Zwei Spieler spielen ein gerechtes Spiel auf sechs Gewinnsätze. Es muss beim Stande von fünf zu drei Gewinnsätzen abgebrochen werden. Wie teilt man den Siegespreis gerecht auf (d. h. nach den Gewinnchancen)?

Das Aufteilungsparadoxon

Zwei Spieler spielen ein gerechtes Spiel auf sechs Gewinnsätze. Es muss beim Stande von fünf zu drei Gewinnsätzen abgebrochen werden. Wie teilt man den Siegespreis gerecht auf (d. h. nach den Gewinnchancen)?

- Vorschläge: $5 : 3$ (im Verhältnis der gewonnenen Runden) oder $2 : 1$.

Das Aufteilungsparadoxon

Zwei Spieler spielen ein gerechtes Spiel auf sechs Gewinnsätze. Es muss beim Stande von fünf zu drei Gewinnsätzen abgebrochen werden. Wie teilt man den Siegespreis gerecht auf (d. h. nach den Gewinnchancen)?

- Vorschläge: $5 : 3$ (im Verhältnis der gewonnenen Runden) oder $2 : 1$.
- richtige Lösung: $7 : 1$, denn in sieben von acht möglichen fiktiven Fortsetzungen gewinnt der Führende.

Das Aufteilungsparadoxon

Zwei Spieler spielen ein gerechtes Spiel auf sechs Gewinnsätze. Es muss beim Stande von fünf zu drei Gewinnsätzen abgebrochen werden. Wie teilt man den Siegespreis gerecht auf (d. h. nach den Gewinnchancen)?

- Vorschläge: $5 : 3$ (im Verhältnis der gewonnenen Runden) oder $2 : 1$.
- richtige Lösung: $7 : 1$, denn in sieben von acht möglichen fiktiven Fortsetzungen gewinnt der Führende.
- erste Publikation des Paradoxons 1494 in Venedig von Fra Luca Paccioli.
- falsche Lösung publiziert von Niccolo Tartaglia.
- richtige Lösung 1654 unabhängig von Pascal und Fermat gefunden.
- Lösung galt als Geburtsstunde der Wahrscheinlichkeitsrechnung!

Die Akteure

PIERRE DE FERMAT (1607/08-1665)

BLAISE PASCAL (1623-1662)

FRA LUCA PACIOLI (1445-1514 oder 1517)

NICCOLO TARTAGLIA (1499-1557)

Unabhängigkeitsparadoxon

Ein Junge soll gegen seine Eltern entweder in der Reihenfolge ‘Mutter – Vater – Mutter’ oder ‘Vater – Mutter – Vater’ drei Tennismatches bestreiten. Er soll dabei zweimal hintereinander gewinnen. Der Vater spielt stärker als die Mutter. Soll der Sohn die erste Reihenfolge wählen oder die zweite, um seine Chancen zu erhöhen?

Unabhängigkeitsparadoxon

Ein Junge soll gegen seine Eltern entweder in der Reihenfolge ‘Mutter – Vater – Mutter’ oder ‘Vater – Mutter – Vater’ drei Tennismatches bestreiten. Er soll dabei zweimal hintereinander gewinnen. Der Vater spielt stärker als die Mutter. Soll der Sohn die erste Reihenfolge wählen oder die zweite, um seine Chancen zu erhöhen?

- Intuitiv: ‘M-V-M’ sollte bessere Chancen bieten, da er dann nur einmal gegen den Vater spielen muss.

Unabhängigkeitsparadoxon

Ein Junge soll gegen seine Eltern entweder in der Reihenfolge ‘Mutter – Vater – Mutter’ oder ‘Vater – Mutter – Vater’ drei Tennismatches bestreiten. Er soll dabei zweimal hintereinander gewinnen. Der Vater spielt stärker als die Mutter. Soll der Sohn die erste Reihenfolge wählen oder die zweite, um seine Chancen zu erhöhen?

- Intuitiv: ‘M-V-M’ sollte bessere Chancen bieten, da er dann nur einmal gegen den Vater spielen muss.
- Andererseits *muss* er dann gegen ihn gewinnen!

Unabhängigkeitsparadoxon

Ein Junge soll gegen seine Eltern entweder in der Reihenfolge ‘Mutter – Vater – Mutter’ oder ‘Vater – Mutter – Vater’ drei Tennismatches bestreiten. Er soll dabei zweimal hintereinander gewinnen. Der Vater spielt stärker als die Mutter. Soll der Sohn die erste Reihenfolge wählen oder die zweite, um seine Chancen zu erhöhen?

- Intuitiv: ‘M-V-M’ sollte bessere Chancen bieten, da er dann nur einmal gegen den Vater spielen muss.
- Andererseits *muss* er dann gegen ihn gewinnen!
- Systematische Lösung: Der Sohn gewinne gegen den Vater mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ und gegen die Mutter mit Wahrscheinlichkeit $q \in [0, 1]$, also $p < q$.

Unabhängigkeitsparadoxon

Ein Junge soll gegen seine Eltern entweder in der Reihenfolge ‘Mutter – Vater – Mutter’ oder ‘Vater – Mutter – Vater’ drei Tennismatches bestreiten. Er soll dabei zweimal hintereinander gewinnen. Der Vater spielt stärker als die Mutter. Soll der Sohn die erste Reihenfolge wählen oder die zweite, um seine Chancen zu erhöhen?

- Intuitiv: ‘M-V-M’ sollte bessere Chancen bieten, da er dann nur einmal gegen den Vater spielen muss.
- Andererseits *muss* er dann gegen ihn gewinnen!
- Systematische Lösung: Der Sohn gewinne gegen den Vater mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ und gegen die Mutter mit Wahrscheinlichkeit $q \in [0, 1]$, also $p < q$.
- Dann hat er in der Reihenfolge ‘M-V-M’ die Gewinnchance $pq + qp - pqp$ und in der Reihenfolge ‘V-M-V’ die Chance $pq + qp - qpq$, was wegen $p < q$ kleiner ist.

Das Julklapp-Paradoxon

Man hofft beim Julklapp ($=$ Wichteln), dass nur selten jemand sein eigenes Geschenk zufällig zurück erhält, wird aber enttäuscht:

> N Kinder bringen zum Julklapp ($=$ Wichteln) je ein Geschenk mit. Die N Geschenke werden gemischt, und an je ein Kind wird genau ein Geschenk zufällig vergeben. Tatsächlich ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Kind sein eigenes Geschenk zurück erhält, viel größer als die Wahrscheinlichkeit, dass dies nicht passiert.

Das Julklapp-Paradoxon

Man hofft beim Julklapp ($=$ Wichteln), dass nur selten jemand sein eigenes Geschenk zufällig zurück erhält, wird aber enttäuscht:

> N Kinder bringen zum Julklapp ($=$ Wichteln) je ein Geschenk mit. Die N Geschenke werden gemischt, und an je ein Kind wird genau ein Geschenk zufällig vergeben. Tatsächlich ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Kind sein eigenes Geschenk zurück erhält, viel größer als die Wahrscheinlichkeit, dass dies nicht passiert.

- Lösung: Es gibt $N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (N-1) \cdot N$ Möglichkeiten, die N Geschenke zurück zu verteilen.

Das Julklapp-Paradoxon

Man hofft beim Julklapp ($=$ Wichteln), dass nur selten jemand sein eigenes Geschenk zufällig zurück erhält, wird aber enttäuscht:

N Kinder bringen zum Julklapp ($=$ Wichteln) je ein Geschenk mit. Die N Geschenke werden gemischt, und an je ein Kind wird genau ein Geschenk zufällig vergeben. Tatsächlich ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Kind sein eigenes Geschenk zurück erhält, viel größer als die Wahrscheinlichkeit, dass dies nicht passiert.

- Lösung: Es gibt $N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (N-1) \cdot N$ Möglichkeiten, die N Geschenke zurück zu verteilen.
- Die Anzahl der Fälle, in denen niemand sein eigenes zurück erhält, ist gleich

$$\binom{N}{0} N! - \binom{N}{1}(N-1)! + \binom{N}{2}(N-2)! - \binom{N}{3}(N-3)! \pm \cdots + (-1)^N 0!$$

Das Julklapp-Paradoxon

Man hofft beim Julklapp ($=$ Wichteln), dass nur selten jemand sein eigenes Geschenk zufällig zurück erhält, wird aber enttäuscht:

> N Kinder bringen zum Julklapp ($=$ Wichteln) je ein Geschenk mit. Die N Geschenke werden gemischt, und an je ein Kind wird genau ein Geschenk zufällig vergeben. Tatsächlich ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein Kind sein eigenes Geschenk zurück erhält, viel größer als die Wahrscheinlichkeit, dass dies nicht passiert.

- Lösung: Es gibt $N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot (N-1) \cdot N$ Möglichkeiten, die N Geschenke zurück zu verteilen.
- Die Anzahl der Fälle, in denen niemand sein eigenes zurück erhält, ist gleich

$$\binom{N}{0} N! - \binom{N}{1}(N-1)! + \binom{N}{2}(N-2)! - \binom{N}{3}(N-3)! \pm \cdots + (-1)^N 0!$$

- Also ist die Wahrscheinlichkeit dafür gleich

$$\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \pm \cdots + (-1)^N \frac{1}{N!},$$

und dies ist für große N ungefähr $1/\mathrm{e} \approx 0,3679$.

Das Geburtstagsparadoxon

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Personen im Saal den selben Geburtstag haben, ist

- größer als 50% bei mindestens 23 Personen,
- größer als 99% bei mindestens 55 Personen,
- größer als $99,9\%$ bei mindestens 68 Personen.

Das Geburtstagsparadoxon

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Personen im Saal den selben Geburtstag haben, ist

- größer als 50% bei mindestens 23 Personen,
- größer als 99% bei mindestens 55 Personen,
- größer als $99,9\%$ bei mindestens 68 Personen.

Diese Wahrscheinlichkeit (nennen wir sie p) kann man bei N Tagen im Jahr und x Personen im Saal (natürlich $x < N$ vorausgesetzt) berechnen zu

$$p = 1 - \frac{N \cdot (N-1) \cdot (N-2) \cdot \dots \cdot (N-x+1)}{N^x}, \qquad \text{also} \qquad x \approx \sqrt{2N \log \frac{1}{1-p}}.$$

Mit $N = 365$ kann man obige Aussagen nachrechnen.

Das St.-Petersburg-Paradoxon

Im Petersburger Spiel wirft der Spieler eine faire Münze so lange, bis ‘Kopf’ erscheint. Passiert dies im N-ten Wurf, erhält er von der Bank 2^N Rubel, d. h., der Gewinn verdoppelt sich nach jedem Wurf. Wieviel Einsatz soll die Bank von ihm fordern, damit das Spiel gerecht ist, d. h., der Erwartungswert des Gewinns gleich dem Einsatz ist?

Das St.-Petersburg-Paradoxon

Im Petersburger Spiel wirft der Spieler eine faire Münze so lange, bis ‘Kopf’ erscheint. Passiert dies im N-ten Wurf, erhält er von der Bank 2^N Rubel, d. h., der Gewinn verdoppelt sich nach jedem Wurf. Wieviel Einsatz soll die Bank von ihm fordern, damit das Spiel gerecht ist, d. h., der Erwartungswert des Gewinns gleich dem Einsatz ist?

- Es ist ein unendlich großer Einsatz: Mit Wahrscheinlichkeit 2^{-k} ist das Spiel im k-ten Wurf beendet, und dann muss die Bank 2^k Rubel zahlen. Also zahlt die Bank durchschnittlich den Betrag

$$\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 8 + \cdots = 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty.$$

Das St.-Petersburg-Paradoxon

Im Petersburger Spiel wirft der Spieler eine faire Münze so lange, bis ‘Kopf’ erscheint. Passiert dies im N-ten Wurf, erhält er von der Bank 2^N Rubel, d. h., der Gewinn verdoppelt sich nach jedem Wurf. Wieviel Einsatz soll die Bank von ihm fordern, damit das Spiel gerecht ist, d. h., der Erwartungswert des Gewinns gleich dem Einsatz ist?

- Es ist ein unendlich großer Einsatz: Mit Wahrscheinlichkeit 2^{-k} ist das Spiel im k-ten Wurf beendet, und dann muss die Bank 2^k Rubel zahlen. Also zahlt die Bank durchschnittlich den Betrag

$$\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 8 + \cdots = 1 + 1 + 1 + \cdots = \infty.$$

- Falls die Bank z. B. nur eine Million Rubel auszahlen kann, dann ist wegen $2^{20} > 1.000.000 > 2^{19}$ der Erwartungswert des Gewinns

$$\frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot 8 + \cdots + \frac{1}{2^{19}} \cdot 2^{19} + \left(\frac{1}{2^{20}} + \frac{1}{2^{21}} + \ldots\right) 1.000.000 = 19 + 1,90\ldots \approx 21.$$

Bei einem Einsatz von 21 Rubel ist dann also die Bank leicht im Vorteil.

Wie wähle ich meinen Ehepartner?

Man kann oft aus vielen verschiedenen Objekten das beste wählen, muss aber sofort zugreifen, denn die Chance wird nie wieder kommen. Wie kann man bei dieser ad-hoc-Entscheidung wenigstens mit einer guten Chance das beste erwischen?

Wenn N unterschiedliche Dinge in einer zufälligen Reihenfolge (d. h. jede Reihenfolge hat die gleiche Wahrscheinlichkeit) nacheinander gezeigt werden (und dann nie wieder), so gibt es eine Methode, mit der man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $1/\mathrm{e} \approx 0,37$ das beste dieser N Dinge wählen kann.

Wie wähle ich meinen Ehepartner?

Man kann oft aus vielen verschiedenen Objekten das beste wählen, muss aber sofort zugreifen, denn die Chance wird nie wieder kommen. Wie kann man bei dieser ad-hoc-Entscheidung wenigstens mit einer guten Chance das beste erwischen?

Wenn N unterschiedliche Dinge in einer zufälligen Reihenfolge (d. h. jede Reihenfolge hat die gleiche Wahrscheinlichkeit) nacheinander gezeigt werden (und dann nie wieder), so gibt es eine Methode, mit der man mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $1/\mathrm{e} \approx 0,37$ das beste dieser N Dinge wählen kann.

Die richtige Methode ist die folgende:

Man weist die ersten $N/\mathrm{e} \approx 0,37N$ Dinge zurück und wählt danach das erste, das besser ist als alle vorangegangenen (bzw. den letzten, wenn kein solcher existiert).

Das Gladiatorenparadoxon I

UNIVERSITÄT LEIPZIG

zum Aufwärmen: ein stochastisches Rätsel!

Ein skurriler Millionär schickt an 20 Wahrscheinlichkeitstheoretiker einen Brief:

> *Sie können nun entscheiden, ob Sie einen Brief an mich schicken oder nicht. Falls genau ein Brief bei mir ankommt, schenke ich dem Absender eine Million Euro. Falls kein Brief mich erreicht oder mehr als einer, so erhält niemand etwas von mir. Sie dürfen natürlich keinen Kontakt zu den anderen 19 aufnehmen.*

Soll man nun abschicken oder nicht?

Das Gladiatorenparadoxon I

zum Aufwärmen: ein stochastisches Rätsel!

Ein skurriler Millionär schickt an 20 Wahrscheinlichkeitstheoretiker einen Brief:

> *Sie können nun entscheiden, ob Sie einen Brief an mich schicken oder nicht. Falls genau ein Brief bei mir ankommt, schenke ich dem Absender eine Million Euro. Falls kein Brief mich erreicht oder mehr als einer, so erhält niemand etwas von mir. Sie dürfen natürlich keinen Kontakt zu den anderen 19 aufnehmen.*

Soll man nun abschicken oder nicht?

- Dies ist ein stochastisches Rätsel: Die beiden deterministischen Strategien (abschicken bzw. nicht abschicken) haben Erfolgswahrscheinlichkeit Null.

Das Gladiatorenparadoxon I

zum Aufwärmen: ein stochastisches Rätsel!

Ein skurriler Millionär schickt an 20 Wahrscheinlichkeitstheoretiker einen Brief:

> *Sie können nun entscheiden, ob Sie einen Brief an mich schicken oder nicht. Falls genau ein Brief bei mir ankommt, schenke ich dem Absender eine Million Euro. Falls kein Brief mich erreicht oder mehr als einer, so erhält niemand etwas von mir. Sie dürfen natürlich keinen Kontakt zu den anderen 19 aufnehmen.*

Soll man nun abschicken oder nicht?

- Dies ist ein stochastisches Rätsel: Die beiden deterministischen Strategien (abschicken bzw. nicht abschicken) haben Erfolgswahrscheinlichkeit Null.
- Also schicken wir mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ ab. Aber welches p wählen wir?

Das Gladiatorenparadoxon I

zum Aufwärmen: ein stochastisches Rätsel!

Ein skurriler Millionär schickt an 20 Wahrscheinlichkeitstheoretiker einen Brief:

> *Sie können nun entscheiden, ob Sie einen Brief an mich schicken oder nicht. Falls genau ein Brief bei mir ankommt, schenke ich dem Absender eine Million Euro. Falls kein Brief mich erreicht oder mehr als einer, so erhält niemand etwas von mir. Sie dürfen natürlich keinen Kontakt zu den anderen 19 aufnehmen.*

Soll man nun abschicken oder nicht?

- Dies ist ein stochastisches Rätsel: Die beiden deterministischen Strategien (abschicken bzw. nicht abschicken) haben Erfolgswahrscheinlichkeit Null.
- Also schicken wir mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ ab. Aber welches p wählen wir?
- Wir gehen davon aus, dass die anderen 19 das selbe p wählen und unabhängig das Selbe machen.
- Also erhalte ich die Million mit Wahrscheinlichkeit $p(1 - p)^{19}$.

Das Gladiatorenparadoxon I

zum Aufwärmen: ein stochastisches Rätsel!

Ein skurriler Millionär schickt an 20 Wahrscheinlichkeitstheoretiker einen Brief:

> *Sie können nun entscheiden, ob Sie einen Brief an mich schicken oder nicht. Falls genau ein Brief bei mir ankommt, schenke ich dem Absender eine Million Euro. Falls kein Brief mich erreicht oder mehr als einer, so erhält niemand etwas von mir. Sie dürfen natürlich keinen Kontakt zu den anderen 19 aufnehmen.*

Soll man nun abschicken oder nicht?

- Dies ist ein stochastisches Rätsel: Die beiden deterministischen Strategien (abschicken bzw. nicht abschicken) haben Erfolgswahrscheinlichkeit Null.
- Also schicken wir mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ ab. Aber welches p wählen wir?
- Wir gehen davon aus, dass die anderen 19 das selbe p wählen und unabhängig das Selbe machen.
- Also erhalte ich die Million mit Wahrscheinlichkeit $p(1-p)^{19}$.
- Das p, das diese Erfolgswahrscheinlichkeit optimiert, ist $p = \frac{1}{20}$.

Also schicken wir den Brief mit 5 Prozent Wahrscheinlichkeit ab.

Das Gladiatorenparadoxon II

Nun das eigentliche Paradoxon:

A und B halten jeweils einen oder zwei Finger hoch. Ist die Gesamtzahl der erhobenen Finger gerade, so zahlt B an A, ist sie ungerade, so zahlt A an B, und zwar zahlt man soviele Einheiten, wie Finger erhoben wurden.
Ist dieses Spiel gerecht? Würden Sie lieber A oder B sein?

Das Gladiatorenparadoxon II

Nun das eigentliche Paradoxon:

A und B halten jeweils einen oder zwei Finger hoch. Ist die Gesamtzahl der erhobenen Finger gerade, so zahlt B an A, ist sie ungerade, so zahlt A an B, und zwar zahlt man soviele Einheiten, wie Finger erhoben wurden.
Ist dieses Spiel gerecht? Würden Sie lieber A oder B sein?

Das Spiel scheint gerecht:

B / A	ein Finger	zwei Finger
ein Finger	2	-3
zwei Finger	-3	4

Das Gladiatorenparadoxon III

Tatsächlich aber ist das Spiel klar vorteilhaft für B!

Das Gladiatorenparadoxon III

Tatsächlich aber ist das Spiel klar vorteilhaft für B!
Hier ist die Lösung:

- A hält einen Finger mit Wahrscheinlichkeit p hoch (und zwei mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)$), und B tut dies mit Wahrscheinlichkeit q.

Das Gladiatorenparadoxon III

Tatsächlich aber ist das Spiel klar vorteilhaft für B!
Hier ist die Lösung:

- A hält einen Finger mit Wahrscheinlichkeit p hoch (und zwei mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)$), und B tut dies mit Wahrscheinlichkeit q.
- Dann zahlt B an A durchschnittlich

$$V = V(p,q) = 2pq - 3p(1-q) - 3(1-p)q + 4(1-p)(1-q) = 12pq - 7p - 7q + 4.$$

Das Gladiatorenparadoxon III

Tatsächlich aber ist das Spiel klar vorteilhaft für B!
Hier ist die Lösung:

- A hält einen Finger mit Wahrscheinlichkeit p hoch (und zwei mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)$), und B tut dies mit Wahrscheinlichkeit q.
- Dann zahlt B an A durchschnittlich

$$V = V(p,q) = 2pq - 3p(1-q) - 3(1-p)q + 4(1-p)(1-q) = 12pq - 7p - 7q + 4.$$

- A möchte den Wert von $V(p,q)$ möglichst groß machen, muss aber mit der besten Strategie von B rechnen. Er muss also $\min_q V(p,q)$ über p maximieren. Analog muss B den Wert von $\max_p V(p,q)$ über q minimieren. (Hier kommt die Asymmetrie hinein!)

Das Gladiatorenparadoxon III

Tatsächlich aber ist das Spiel klar vorteilhaft für B!
Hier ist die Lösung:

- A hält einen Finger mit Wahrscheinlichkeit p hoch (und zwei mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)$), und B tut dies mit Wahrscheinlichkeit q.
- Dann zahlt B an A durchschnittlich

$$V = V(p,q) = 2pq - 3p(1-q) - 3(1-p)q + 4(1-p)(1-q) = 12pq - 7p - 7q + 4.$$

- A möchte den Wert von $V(p,q)$ möglichst groß machen, muss aber mit der besten Strategie von B rechnen. Er muss also $\min_q V(p,q)$ über p maximieren. Analog muss B den Wert von $\max_p V(p,q)$ über q minimieren. (Hier kommt die Asymmetrie hinein!)
- Falls $p < \frac{7}{12}$, so ist $q = 1$ die beste Strategie für B, und dann ist $V(p,q) = 5p - 3 < -\frac{1}{12}$. Falls $p > \frac{7}{12}$, so ist $q = 0$ die beste Strategie für B, und dann ist $V(p,q) = -7p + 4 \leq -\frac{1}{12}$. Falls $p = \frac{7}{12}$, so ist immer $V = -\frac{1}{12}$.

Das Gladiatorenparadoxon III

Tatsächlich aber ist das Spiel klar vorteilhaft für B!
Hier ist die Lösung:

- A hält einen Finger mit Wahrscheinlichkeit p hoch (und zwei mit Wahrscheinlichkeit $(1-p)$), und B tut dies mit Wahrscheinlichkeit q.
- Dann zahlt B an A durchschnittlich

$$V = V(p,q) = 2pq - 3p(1-q) - 3(1-p)q + 4(1-p)(1-q) = 12pq - 7p - 7q + 4.$$

- A möchte den Wert von $V(p,q)$ möglichst groß machen, muss aber mit der besten Strategie von B rechnen. Er muss also $\min_q V(p,q)$ über p maximieren. Analog muss B den Wert von $\max_p V(p,q)$ über q minimieren. (Hier kommt die Asymmetrie hinein!)
- Falls $p < \frac{7}{12}$, so ist $q = 1$ die beste Strategie für B, und dann ist $V(p,q) = 5p - 3 < -\frac{1}{12}$. Falls $p > \frac{7}{12}$, so ist $q = 0$ die beste Strategie für B, und dann ist $V(p,q) = -7p + 4 \leq -\frac{1}{12}$. Falls $p = \frac{7}{12}$, so ist immer $V = -\frac{1}{12}$.

Dieoptimale Strategie für A ist $p = \frac{7}{12}$, und dann zahlt er immer noch durchschnittlich $\frac{1}{12}$ an B.

Das Wartezeitparadoxon

Wir haben es ja gewusst: Wenn man an die Bushaltestelle kommt, lässt der nächste Bus viel länger auf sich warten als sonst.

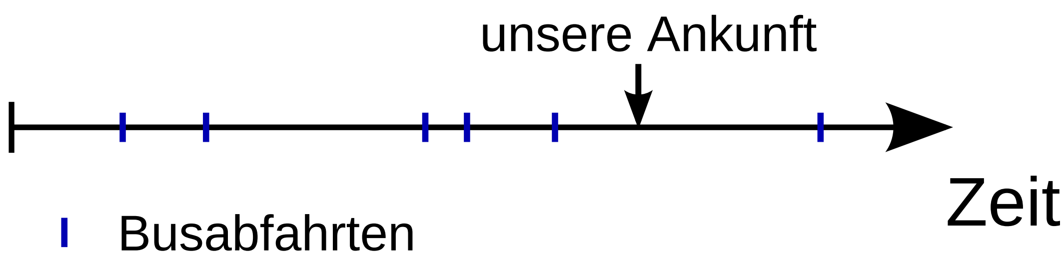
Die Zwischenabfahrtzeiten der Busse von einer Haltestelle seien unabhängig und exponentialverteilt mit Erwartungswert zehn Minuten. Wenn wir an der Haltestelle ankommen, dann ist der letzte abgefahrene Bus erwartungsgemäß vor zehn Minuten abgefahren, und der nächste kommt etwa in zehn Minuten.

Das Wartezeitparadoxon

Wir haben es ja gewusst: Wenn man an die Bushaltestelle kommt, lässt der nächste Bus viel länger auf sich warten als sonst.

> Die Zwischenabfahrtzeiten der Busse von einer Haltestelle seien unabhängig und exponentialverteilt mit Erwartungswert zehn Minuten.
> Wenn wir an der Haltestelle ankommen, dann ist der letzte abgefahrene Bus erwartungsgemäß vor zehn Minuten abgefahren, und der nächste kommt etwa in zehn Minuten.

D. h., die Intervalle zwischen den Abfahrtszeiten sind durchschnittlich zehn Minuten lang, aber wenn wir an der Haltestelle ankommen, doppelt so lang!

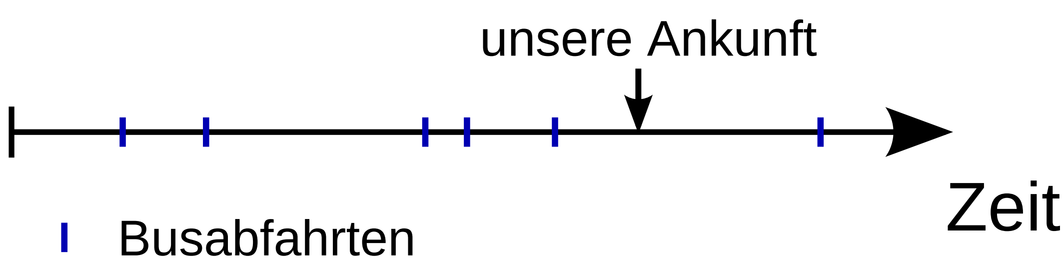


Das Wartezeitparadoxon

Wir haben es ja gewusst: Wenn man an die Bushaltestelle kommt, lässt der nächste Bus viel länger auf sich warten als sonst.

Die Zwischenabfahrtzeiten der Busse von einer Haltestelle seien unabhängig und exponentialverteilt mit Erwartungswert zehn Minuten.
Wenn wir an der Haltestelle ankommen, dann ist der letzte abgefahrene Bus erwartungsgemäß vor zehn Minuten abgefahren, und der nächste kommt etwa in zehn Minuten.

D. h., die Intervalle zwischen den Abfahrtszeiten sind durchschnittlich zehn Minuten lang, aber wenn wir an der Haltestelle ankommen, doppelt so lang!



Das Intervall, das wir beobachten, ist länger geworden durch Beobachtung!

(Wenn es sehr kurz wäre, hätten wir es ja auch mit weniger Wahrscheinlichkeit erwischt.)

Das Simpson'sche Paradoxon

New York Magazine, 11. März 1979: Todesurteile für Mörder in Florida:

Hautfarbe des Angeklagten	Todesurteil Ja/Nein	Quote
schwarz	59 / 2448	$2,4$
weiß	72 / 2158	$3,4$

Also liegt keine Rassendiskriminierung vor, oder?

Das Simpson'sche Paradoxon

New York Magazine, 11. März 1979: Todesurteile für Mörder in Florida:

Hautfarbe des Angeklagten	Todesurteil Ja/Nein	Quote
schwarz	59 / 2448	$2,4$
weiß	72 / 2158	$3,4$

Also liegt keine Rassendiskriminierung vor, oder?

DOCH!

Hautfarbe des Angeklagten/Opfers	Todesurteil Ja/Nein	Quote
schwarz/schwarz	11 / 2209	$0,5$
weiß/schwarz	0 / 111	0
schwarz/weiß	48 / 239	$16,7$
weiß/weiß	72 / 2047	$3,4$

Bei einem weißen Opfer ist die Verurteilung viel häufiger!

Das Simpson'sche Paradoxon

New York Magazine, 11. März 1979: Todesurteile für Mörder in Florida:

Hautfarbe des Angeklagten	Todesurteil Ja/Nein	Quote
schwarz	59 / 2448	$2,4$
weiß	72 / 2158	$3,4$

Also liegt keine Rassendiskriminierung vor, oder?

DOCH!

Hautfarbe des Angeklagten/Opfers	Todesurteil Ja/Nein	Quote
schwarz/schwarz	11 / 2209	$0,5$
weiß/schwarz	0 / 111	0
schwarz/weiß	48 / 239	$16,7$
weiß/weiß	72 / 2047	$3,4$

Bei einem weißen Opfer ist die Verurteilung viel häufiger!

Die Zusammenfassung von Gruppen kann die Aussage der Statistik scheinbar in ihr Gegenteil verkehren!

Rundumsiegen

A und B spielen ein Spiel mit drei Würfeln in vier Schritten:

(1) A beschriftet die drei Würfel mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 18$, so dass jede Zahl einmal vorkommt.

(2) B wählt einen Würfel aus.

(3) A wählt einen der anderen beiden Würfel aus.

(4) A und B würfeln je mit ihrem Würfel; wer die höchste Zahl hat, gewinnt.

Ist das Spiel gerecht? Würden Sie lieber an Stelle von A oder von B spielen?

Rundumsiegen

A und B spielen ein Spiel mit drei Würfeln in vier Schritten:

(1) A beschriftet die drei Würfel mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 18$, so dass jede Zahl einmal vorkommt.

(2) B wählt einen Würfel aus.

(3) A wählt einen der anderen beiden Würfel aus.

(4) A und B würfeln je mit ihrem Würfel; wer die höchste Zahl hat, gewinnt.

Ist das Spiel gerecht? Würden Sie lieber an Stelle von A oder von B spielen?

Das Spiel ist nicht gerecht! Wenn A es gut anstellt, gewinnt er mit Wahrscheinlichkeit $\frac{21}{36}$!

Rundumsiegen

A und B spielen ein Spiel mit drei Würfeln in vier Schritten:

(1) A beschriftet die drei Würfel mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 18$, so dass jede Zahl einmal vorkommt.

(2) B wählt einen Würfel aus.

(3) A wählt einen der anderen beiden Würfel aus.

(4) A und B würfeln je mit ihrem Würfel; wer die höchste Zahl hat, gewinnt.

Ist das Spiel gerecht? Würden Sie lieber an Stelle von A oder von B spielen?

Das Spiel ist nicht gerecht! Wenn A es gut anstellt, gewinnt er mit Wahrscheinlichkeit $\frac{21}{36}$!

Es reicht, z. B. folgendermaßen zu beschriften:

Würfel I: $18, 10, 9, 8, 7, 5$; Würfel II: $17, 16, 15, 4, 3, 2$; Würfel III: $14, 13, 12, 11, 6, 1$.

Rundumsiegen

A und B spielen ein Spiel mit drei Würfeln in vier Schritten:

(1) A beschriftet die drei Würfel mit den Zahlen $1, 2, 3, \ldots, 18$, so dass jede Zahl einmal vorkommt.

(2) B wählt einen Würfel aus.

(3) A wählt einen der anderen beiden Würfel aus.

(4) A und B würfeln je mit ihrem Würfel; wer die höchste Zahl hat, gewinnt.

Ist das Spiel gerecht? Würden Sie lieber an Stelle von A oder von B spielen?

Das Spiel ist nicht gerecht! Wenn A es gut anstellt, gewinnt er mit Wahrscheinlichkeit $\frac{21}{36}$!

Es reicht, z. B. folgendermaßen zu beschriften:

Würfel I: $18, 10, 9, 8, 7, 5$; Würfel II: $17, 16, 15, 4, 3, 2$; Würfel III: $14, 13, 12, 11, 6, 1$.

I gewinnt gegen II, II gewinnt gegen III, und III gewinnt gegen I, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{21}{36}$!

Absurditäten I

In einem Sack sind zwei Bälle, beide sind entweder rot oder weiß. Man soll ihre Farbe erraten, ohne in den Sack zu schauen. Die Antwort muss sein: Der eine Ball ist rot, der andere weiß!

Absurditäten I

UNIVERSITÄT LEIPZIG

> In einem Sack sind zwei Bälle, beide sind entweder rot oder weiß. Man soll ihre Farbe erraten, ohne in den Sack zu schauen. Die Antwort muss sein: Der eine Ball ist rot, der andere weiß!

Begründung (nach Lewis Carroll (1832 – 1898)):

(1) Zunächst machen wir uns klar, dass bei drei Bällen gilt:

Es sind zwei rote und ein weißer Ball $\Longleftrightarrow$ ein roter wird mit Ws. 2/3 gezogen.

Absurditäten I

> In einem Sack sind zwei Bälle, beide sind entweder rot oder weiß. Man soll ihre Farbe erraten, ohne in den Sack zu schauen. Die Antwort muss sein: Der eine Ball ist rot, der andere weiß!

Begründung (nach Lewis Carroll (1832 – 1898)):

(1) Zunächst machen wir uns klar, dass bei drei Bällen gilt:

Es sind zwei rote und ein weißer Ball $\iff$ ein roter wird mit Ws. 2/3 gezogen.

(2) Nun legen wir einen roten Ball zu den zweien. Dann gibt es vier gleichwahrscheinliche Kombinationen: RRR, RWR, RRW und RWW. Im ersten Fall ist die Wahrscheinlichkeit, einen roten Ball zu ziehen, Eins, im zweiten und dritten Fall ist sie $2/3$, und im vierten ist sie $1/3$.

Absurditäten I

In einem Sack sind zwei Bälle, beide sind entweder rot oder weiß. Man soll ihre Farbe erraten, ohne in den Sack zu schauen. Die Antwort muss sein: Der eine Ball ist rot, der andere weiß!

Begründung (nach Lewis Carroll (1832 – 1898)):

(1) Zunächst machen wir uns klar, dass bei drei Bällen gilt:

Es sind zwei rote und ein weißer Ball $\Longleftrightarrow$ ein roter wird mit Ws. 2/3 gezogen.

(2) Nun legen wir einen roten Ball zu den zweien. Dann gibt es vier gleichwahrscheinliche Kombinationen: RRR, RWR, RRW und RWW. Im ersten Fall ist die Wahrscheinlichkeit, einen roten Ball zu ziehen, Eins, im zweiten und dritten Fall ist sie $2/3$, und im vierten ist sie $1/3$.

(3) Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, aus diesem Sack mit drei Bällen eine rote Kugel zu ziehen, gleich

$$1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{3}.$$

Absurditäten I

In einem Sack sind zwei Bälle, beide sind entweder rot oder weiß. Man soll ihre Farbe erraten, ohne in den Sack zu schauen. Die Antwort muss sein: Der eine Ball ist rot, der andere weiß!

Begründung (nach Lewis Carroll (1832 – 1898)):

(1) Zunächst machen wir uns klar, dass bei drei Bällen gilt:

Es sind zwei rote und ein weißer Ball $\iff$ ein roter wird mit Ws. 2/3 gezogen.

(2) Nun legen wir einen roten Ball zu den zweien. Dann gibt es vier gleichwahrscheinliche Kombinationen: RRR, RWR, RRW und RWW. Im ersten Fall ist die Wahrscheinlichkeit, einen roten Ball zu ziehen, Eins, im zweiten und dritten Fall ist sie $2/3$, und im vierten ist sie $1/3$.

(3) Demnach ist die Wahrscheinlichkeit, aus diesem Sack mit drei Bällen eine rote Kugel zu ziehen, gleich

$$1 \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{3}.$$

(4) Nach (1) sind zwei rote und ein weißer Ball im Sack. Da wir eine rote hinzugefügt hatten, muss am Anfang je eine rote und eine weiße im Sack gewesen sein.

Absurditäten II

Das berühmte Ziegenproblem in einer seiner Varianten:

Zwei von drei Gefangenen A, B und C sollen hingerichtet werden, aber sie wissen nicht, welche. Jeder hat also die Wahrscheinlichkeit $1/3$ zu überleben. A bittet den Wärter W, ihm einen von ihm verschiedenen Todeskandidaten zu benennen. W antwortet, dass B hingerichtet werden wird. Nun freut sich A, dass sich seine Überlebenschancen auf 1/2 erhöht haben, denn nur noch C und er kommen in Frage, beide mit gleicher Chance.
Hat er Recht?

Absurditäten II

Das berühmte Ziegenproblem in einer seiner Varianten:

> Zwei von drei Gefangenen A, B und C sollen hingerichtet werden, aber sie wissen nicht, welche. Jeder hat also die Wahrscheinlichkeit $1/3$ zu überleben. A bittet den Wärter W, ihm einen von ihm verschiedenen Todeskandidaten zu benennen. W antwortet, dass B hingerichtet werden wird. Nun freut sich A, dass sich seine Überlebenschancen auf 1/2 erhöht haben, denn nur noch C und er kommen in Frage, beide mit gleicher Chance.
> Hat er Recht?

- Wichtig: Wir gehen davon aus, dass, falls B und C hingerichtet werden, der Wärter beide mit gleicher Wahrscheinlichkeit nennt.

Absurditäten II

Das berühmte Ziegenproblem in einer seiner Varianten:

> Zwei von drei Gefangenen A, B und C sollen hingerichtet werden, aber sie wissen nicht, welche. Jeder hat also die Wahrscheinlichkeit $1/3$ zu überleben. A bittet den Wärter W, ihm einen von ihm verschiedenen Todeskandidaten zu benennen. W antwortet, dass B hingerichtet werden wird. Nun freut sich A, dass sich seine Überlebenschancen auf 1/2 erhöht haben, denn nur noch C und er kommen in Frage, beide mit gleicher Chance.
> Hat er Recht?

- Wichtig: Wir gehen davon aus, dass, falls B und C hingerichtet werden, der Wärter beide mit gleicher Wahrscheinlichkeit nennt.
- In diesem Fall lautet die Antwort Nein, denn Ws Information enthält keine wesentliche neue Information. Daher ist die Überlebenswahrscheinlichkeit von A gleich

$$\mathbb{P}(A \text{ überlebt} \mid W \text{ nennt B}) = \frac{\mathbb{P}(A \text{ überlebt}, W \text{ nennt B})}{\mathbb{P}(W \text{ nennt B})} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+0+\frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Absurditäten II

UNIVERSITÄT LEIPZIG

Das berühmte Ziegenproblem in einer seiner Varianten:

Zwei von drei Gefangenen A, B und C sollen hingerichtet werden, aber sie wissen nicht, welche. Jeder hat also die Wahrscheinlichkeit $1/3$ zu überleben. A bittet den Wärter W, ihm einen von ihm verschiedenen Todeskandidaten zu benennen. W antwortet, dass B hingerichtet werden wird. Nun freut sich A, dass sich seine Überlebenschancen auf 1/2 erhöht haben, denn nur noch C und er kommen in Frage, beide mit gleicher Chance.
Hat er Recht?

- Wichtig: Wir gehen davon aus, dass, falls B und C hingerichtet werden, der Wärter beide mit gleicher Wahrscheinlichkeit nennt.
- In diesem Fall lautet die Antwort Nein, denn Ws Information enthält keine wesentliche neue Information. Daher ist die Überlebenswahrscheinlichkeit von A gleich

$$\mathbb{P}(A \text{ überlebt} \mid W \text{ nennt B}) = \frac{\mathbb{P}(A \text{ überlebt}, W \text{ nennt B})}{\mathbb{P}(W \text{ nennt B})} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+0+\frac{1}{3}\cdot 1} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

- Falls W allerdings B mit Wahrscheinlichkeit p nennt, falls B und C hingerichtet werden, so ergibt sich die Überlebenswahrscheinlichkeit von A als $\frac{p}{1+p}$!