

Theorie und Numerik Partieller
Differentialgleichungen

Volker John

Wintersemester 2006/07

Inhaltsverzeichnis

1	Modellierung mit partiellen Differentialgleichungen	4
1.1	Literatur	6
I	Theorie Partieller Differentialgleichungen	8
1	Erste Eigenschaften von Lösungen partieller Differentialgleichungen	9
1.1	Partielle Integration	9
1.2	Die Laplace-Gleichung	10
1.2.1	Die Laplace-Gleichung im Eindimensionalen	10
1.2.2	Mittelwerteigenschaft	10
1.2.3	Regularität	12
1.2.4	Das Maximumprinzip	13
1.2.5	Das Dirichlet-Prinzip	13
1.3	Eigenschaften anderer partieller Differentialgleichungen	14
1.3.1	Eindeutigkeit der Poisson-Gleichung	14
1.3.2	Das Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung	15
1.3.3	Elementare Lösung einer Transportgleichung	16
1.3.4	Eine Wellengleichung	16
2	Der Gaußsche Satz	19
2.1	Glattheit von Gebietsrändern	19
2.2	Randintegrale	20
2.3	Der Satz von Gauß für glatte Integranden	22
3	Distributionen	25
4	Sobolev-Räume	30
4.1	Elementare Ungleichungen	30
4.2	Definition und Eigenschaften der Sobolev-Räume $W^{k,p}(\Omega)$	32
4.3	Die Spur (Verallgemeinerte Randfunktion)	34
4.4	Sobolev-Räume mit nichtganzzahligem und negativem Exponenten	34
4.5	Satz über äquivalente Normierungen	35
4.6	Einige Ungleichungen in Sobolev-Räumen	36
4.7	Der Gaußsche Satz	38
4.8	Einbettungssätze und Sobolev-Ungleichungen	39
5	Energiemethoden für elliptische Differentialgleichungen	42
5.1	Typeneinteilung bei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung	42
5.2	Variationsmethode und symmetrische Probleme	43
5.2.1	Existenz einer Lösung im Sinne der Distributionen	43

5.2.2	Existenz einer Lösung im Sinne des Hilbert–Raumes, Darstellungssatz von Riesz	45
5.3	Bilinearformen und Darstellungssatz von Lax–Milgram	47
5.4	Weitere Eigenschaften	49
5.4.1	Das Neumann–Problem	49
5.4.2	$H^2(\Omega)$ –Regularität	50
6	Darstellungsformeln für Lösungen von elliptischen Differentialgleichungen	52
6.1	Fundamentallösung	52
6.2	Greensche Funktionen	54
7	Maximumprinzip für elliptische Gleichungen	56
8	Darstellungsformeln für die Lösung von parabolischen Differentialgleichungen	59
8.1	Die Fundamentallösung im Ganzraum	59
8.2	Lösung der homogenen Gleichung im Ganzraum	61
8.3	Die Lösung des inhomogenen Problems	61
8.4	Maximumprinzip und Eindeutigkeit für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung	63
II	Numerik Partieller Differentialgleichungen	66
9	Finite–Differenzen–Verfahren für elliptische Gleichungen	67
9.1	Grundlagen	67
9.2	Differenzenapproximation des Laplace–Operators in zwei Dimensionen	69
9.3	Das Dirichlet–Problem	70
9.4	Das diskrete Maximum–Prinzip	71
9.5	Stabilität und Konvergenz	75
9.6	Das Dirichlet–Problem im Rechteck	78
10	Finite–Elemente	82
10.1	Das Ritzsche Verfahren	82
10.2	Finite–Element–Räume	84
10.3	Parameterische Finite–Elemente	87
10.4	Finite–Elemente auf Dreiecken und Tetraedern	87
10.5	Finite–Elemente auf Rechtecken und Quadern	92
10.6	Parametrische Elemente auf allgemeinen Vierecken	95
11	Interpolation	97
11.1	Polynominterpolation in Sobolov–Räumen	97
11.1.1	Das Bramble–Hilbert–Lemma	97
11.1.2	Interpolationsfehlerabschätzung	100
11.2	Inverse Abschätzungen	104
11.3	Interpolation nichtglatter Funktionen	105
12	Finite–Element–Methoden für Elliptische Gleichungen zweiter Ordnung	108
12.1	Allgemeine Konvergenzsätze	108
12.2	Lineare Finite–Element–Methoden auf nicht polyhedral berandeten Gebieten	110
12.3	Finite–Element–Methode mit dem nichtkonformen Crouzeix–Raviart–Element	114

12.4	$L^2(\Omega)$ -Fehlerabschätzungen	118
12.5	Gemischte Randwertprobleme	120
13	Ausblick	122
13.1	Adaptive Finite-Element-Verfahren	122
13.2	Konvektions-dominante Probleme	124
13.3	Sattelpunktprobleme	125
13.4	Fortgeschrittene Finite-Elemente-Verfahren	125

Kapitel 1

Modellierung mit partiellen Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt wird exemplarisch gezeigt, dass man physikalische Gesetze und Prinzipien mit partiellen Differentialgleichungen beschreiben kann.

Wir betrachten die Ausbreitung von Wärme in einem Körper. Wird beispielsweise ein Metallkörper am Rand zeitlich konstant beheizt, so beobachtet man, dass sich nach einer gewissen Zeit eine feste Temperaturverteilung innerhalb des Körpers ausbildet. Die Aufgabe besteht nun darin, diesen Prozess zu modellieren, das heißt, ihn mit Gleichungen (oder auch Ungleichungen) zu beschreiben.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ das Gebiet, welches der Metallkörper einnimmt. Die unbekannte Temperaturverteilung, die jedem Punkt des Körpers seine Temperatur zuordnet, wird mit u bezeichnet, $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Zusätzlich wird der Wärmestrom $\mathbf{j} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ eingeführt, der für jeden Raumpunkt $\mathbf{x} \in \Omega$ angibt, in welche Richtung und wieviel Wärmeenergie transportiert wird.

Im Gedankenexperiment betrachten wir ein beliebiges Volumen $V \subset \Omega$. Wenn man lange genug wartet, ändert sich die Wärmeverteilung in V nicht mehr. In diesem Fall darf nur soviel Wärme in V hinein transportiert werden, wie auch heraus transportiert wird, da sonst die Temperatur steigen oder fallen würde. Sei \mathbf{n} der Einheits-Normalenvektor an den Rand ∂V von V , dann muss also gelten

$$\int_{\partial V} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0.$$

Mit dem Gaußschen¹ Satz (partielle Integration) kann man diese Beziehung wie folgt äquivalent schreiben

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{j} \, d\mathbf{x} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{j} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial V} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0.$$

Da das Volumen beliebig war, verschwindet der Integrand im Volumenintegral und es gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad \text{in } \Omega. \tag{1.1}$$

Nun wird eine Abhängigkeit zwischen \mathbf{j} und u benötigt. Diese erhält man durch Beobachtungen, Auswertung von Experimenten und anschließende Modellierung. Die einfachste Abhängigkeit im Falle der Wärmeausbreitung ist das sogenannte Fourier²-Gesetz:

¹Johann Carl Friedrich Gauss (1777 – 1855)

²Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 – 1830)

Man nimmt an, dass die Wärme immer vom warmen zum kalten Bereich strömt und dass die Geschwindigkeit proportional zum Temperaturunterschied ist.

Der erste Teil entspricht dem gesunden Menschenverstand. Der zweite Teil postuliert den linearen Zusammenhang

$$\mathbf{j} = -a\nabla u, \quad (1.2)$$

wobei $a > 0$ die Wärmeleitfähigkeit des Materials beschreibt.

Wir nehmen an, dass das Material homogen ist und damit a eine Konstante ist. Setzt man (1.2) in (1.1) ein, so erhält man die sogenannte Laplace³-Gleichung

$$-\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (1.3)$$

Dabei bezeichnet Δ den Laplace-Operator in d -Dimensionen

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \sum_{i=1}^d \partial_i^2.$$

Die Lösungen der Laplace-Gleichung heißen harmonische Funktionen.

Falls die Leitfähigkeit vom Raumpunkt abhängt, also $a = a(\mathbf{x})$, dann bleibt er in der Gleichung erhalten und man erhält durch Einsetzen in (1.1)

$$-\nabla \cdot (a\nabla u) = 0 \quad \text{in } \Omega. \quad (1.4)$$

Falls es Wärmequellen innerhalb des Körpers gibt, die in jedem Punkt $\mathbf{x} \in \Omega$ die Wärmemenge $f(\mathbf{x})$ erzeugen (oder absorbieren), dann hat man statt (1.4) die Gleichung

$$-\nabla \cdot (a\nabla u) = f \quad \text{in } \Omega. \quad (1.5)$$

Im Fall $a = 1$ ist das die sogenannte Poisson⁴-Gleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega. \quad (1.6)$$

Falls man eine instationäre, das heißt zeitlich veränderliche Situation betrachtet, dann ist der Wärmestrom nach V im allgemeinen nicht Null, sondern er bewirkt eine Änderung der Temperatur in V

$$\int_V \frac{\partial u}{\partial t} d\mathbf{x} = \int_V \partial_t u d\mathbf{x}.$$

Mit der gleichen Argumentation und unter den gleichen Annahmen wie oben, erhält man die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \times (0, T) \quad (1.7)$$

Um die Temperaturverteilung im Inneren des Körpers zu kennen, muss man 'nur' die Gleichung (1.3) lösen. Dabei muss man zudem Bedingungen am Rand des Körpers (Randbedingungen) beachten. Die hergeleiteten Modelle (1.3) – (1.7) nennt man partielle Differentialgleichungen weil in ihnen partielle Ableitungen (in unterschiedliche Richtungen) vorkommen (im Unterschied zu gewöhnlichen Differentialgleichungen, bei denen nur Ableitungen in eine Richtung vorkommen).

Die oben beschriebenen Phänomene waren eine Energieerhaltung in (1.1) und eine lineare Beziehung zwischen Strom und u -Gradient in (1.2). Man kann mit Gleichungen vom Typ (1.1) auch die Erhaltung anderer Größen wie Masse, Ladung oder Impuls beschreiben. Ansätze der Form (1.2) hat man auch in anderen physikalischen Prozessen:

³Pierre Simon Laplace (1749 – 1829)

⁴Siméon Denis Poisson (1781 – 1840)

Bedeutung von u	Name für Gesetz (1.2)
Temperatur	Fourier-Gesetz
chemische Konzentration	Fick ⁵ 'sches Diffusionsgesetz
elektrostatisches Potential	Ohm ⁶ 'sches Gesetz
Flüssigkeitsdruck	Darcy ⁷ -Gesetz
Deformation	Hooke ⁸ 'sches Gesetz

Für all diese Prozesse erhält man letztlich Modelle der Form (1.3), (1.6) oder (1.7).

Die Bedeutung partieller Differentialgleichungen resultiert daher, dass man sehr viele Vorgänge in der Natur, aber auch Prozesse in Industrie und Wirtschaft, mit Hilfe solcher Gleichungen beschreiben kann, zum Beispiel:

- Elektrostatik, elektromagnetische Wellen (Maxwell¹⁰-Gleichung),
- Elastizität (Kräfte in Werkstoffen), Plastizität,
- Strömungen von Flüssigkeiten (Navier¹¹-Stokes¹²-Gleichungen),
- Ausbreitung von Schall (Helmholtz¹³-Gleichungen),
- Verbrennungsvorgänge (Reaktions-Diffusions-Gleichungen),
- Populationsdynamiken in der Biologie und chemischen Prozessen,
- elektro-chemische Vorgänge (z.B. Nervenreizleitung),
- Optionspreise in der Finanzmathematik.

Fragestellungen, die aus mathematischer Sicht untersucht werden müssen, beinhalten:

- Was sind geeignete Lösungsbegriffe für gewisse Klassen partieller Differentialgleichungen?
- Existieren Lösungen?
- Sind Lösungen eindeutig?
- Welche Glattheitseigenschaften hat die Lösungen (in welchem Funktionenraum liegt sie)?
- Welche anderen charakteristischen Eigenschaften besitzt die Lösung?
- Wie konstruiert man numerische Verfahren zur Approximation der Lösung?
- Wie groß ist der Fehler, den man bei diesen numerischen Verfahren begeht?

Die Existenz, Eindeutigkeit, Regularität und die Eigenschaften, werden im ersten Teil der Vorlesung behandelt. Wir werden sehen, dass man die Lösung von partiellen Differentialgleichungen im allgemeinen nicht in geschlossener Form angeben kann. Um eine Vorstellung von der Lösung zu bekommen, ist man auf numerische Verfahren angewiesen. Wichtige numerische Verfahren sind Thema des zweiten Teils der Vorlesung.

1.1 Literatur

Zur Theorie partieller Differentialgleichungen:

- H.-W. Alt: Lineare Funktionalanalysis. Eine anwendungsorientierte Einführung. 3. Auflage. Springer-Lehrbuch, 1999, [Alt99],
- E. DiBenedetto: Partial Differential Equations. Birkhäuser 1995, [DiB95].
- L.C. Evans: Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics No. 19, AMS 1998, [Eva98],

⁵Adolf Eugen Fick (1829 – 1901)

⁶Georg Simon Ohm (1789 – 1854)

⁷Henry Philibert Gaspard Darcy (1803 – 1858)

⁸Robert Hooke (1635 – 1703)

¹⁰James Clerk Maxwell (1831 – 1879)

¹¹Claude Louis Marie Henri Navier (1785 – 1836)

¹²George Gabriel Stokes (1819 – 1903)

¹³Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821 – 1894)

- D. Gilbarg und N.S. Trudinger: Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. Classics in Mathematics. Springer 2001, [GT01].
- J. Jost. Partielle Differentialgleichungen. Springer 1998, [Jos98]. Englische Version 2002.
- M. Renardy und R. Rogers: An introduction to partial differential equations. Texts in Applied Mathematics 13. Springer 1996, [RR96].

Zur Numerik partieller Differentialgleichungen:

- D. Braess: Finite Elemente. Springer 2003
- S.C. Brenner, L.R. Scott: The Mathematical Theory of Finite Element Methods. Springer 1994, [BS94].
- C. Grossman, H.-G. Roos: Numerik partieller Differentialgleichungen. Teubner 2005
- P. Knabner, L. Angermann: Numerik partieller Differentialgleichungen. Springer 2000

Teil I

Theorie Partieller
Differentialgleichungen

Kapitel 1

Erste Eigenschaften von Lösungen partieller Differentialgleichungen

In diesem Abschnitt werden einige elementar beweisbare Aussagen über Lösungen verschiedener Gleichungen präsentiert.

1.1 Partielle Integration

Eines der wichtigsten Hilfsmittel in der Theorie partieller Differentialgleichungen ist der Gaußsche Satz. Er wird hier in der Formulierung der partiellen Integration angegeben. In Kapitel 2 werden wir uns eingehender mit diesem Satz beschäftigen.

Satz 1.1 Partielle Integration. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene, beschränkte Teilmenge mit C^1 -Rand $\partial\Omega$ und äußeren Einheits-Normalen \mathbf{n} . Dann gilt für Funktionen $u, v \in C^1(\overline{\Omega})$

$$\int_{\Omega} u \nabla v \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} v \nabla u \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} uv \mathbf{n} \, ds. \quad (1.1)$$

Alle Integrale sind als Lebesgue¹-Integrale zu verstehen. Die Forderung, dass Ω einen C^1 -Rand haben soll, wird später in Definition 2.1 konkretisiert. Für den Moment sei nur gesagt, dass der Rand von Ω gewissen Bedingungen genügen muss, das Gebiet also nicht beliebig sein darf.

Insbesondere erhält man für $u = 1$

$$\int_{\Omega} \nabla v \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} v \mathbf{n} \, ds \quad \text{oder} \quad \int_{\Omega} \partial_i v \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} v n_i \, ds, \quad i = 1, \dots, d.$$

Falls $\mathbf{v} \in C^1(\overline{\Omega})$ eine vektorwertige Funktion ist, kann man diese Formel auf jede Komponente anwenden und addieren. Man erhält damit den klassischen Gaußschen Satz

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

¹Henri Lebesgue (1875 – 1941)

1.2 Die Laplace-Gleichung

1.2.1 Die Laplace-Gleichung im Eindimensionalen

Zusammenhängende Gebiete in einer Dimension sind Intervalle $\Omega = (a, b)$ mit $a < b$. Sei $u \in C^2((a, b))$ eine Funktion, die die Laplace-Gleichung löst, also

$$-u'' = 0 \quad \text{in } (a, b).$$

Damit ist die Ableitung u' konstant in (a, b) und daraus folgt wiederum, dass u linear ist

$$u(x) = cx + d, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

Die freien Parameter c, d müssen für ein konkretes Problem durch geeignete Nebenbedingungen bestimmt werden, beispielsweise durch die vorgegebenen Randbedingungen $u(a)$ und $u(b)$.

1.2.2 Mittelwerteigenschaft

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$ ein offenes Gebiet. Wir bezeichnen die offene Kugel mit Radius $r > 0$ und Mittelpunkt \mathbf{x} mit $B(\mathbf{x}, r)$.

Mittelwerte über eine Mannigfaltigkeit $\Sigma \subset \mathbb{R}^d$ werden mit

$$\oint_{\Sigma} u \, ds := \frac{1}{|\Sigma|} \int_{\Sigma} u \, ds \quad \text{mit} \quad |\Sigma| = \int_{\Sigma} ds$$

bezeichnet.

Satz 1.2 Mittelwertformel für harmonische Funktionen. Sei $u \in C^2(\Omega)$ mit $\Delta u = 0$ in Ω . Dann gilt

$$u(\mathbf{x}) = \oint_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u \, ds. \quad (1.2)$$

für jede Kugel $B(\mathbf{x}, r) \subset \Omega$.

Beweis: Sei $\mathbf{x} \in \Omega$ beliebig aber fest gewählt. Wir transformieren die Integrale in (1.2) auf den Rand der Einheitskugel

$$\begin{aligned} \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} ds &= r^{d-1} \int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} dy, \\ \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{s}) \, ds &= r^{d-1} \int_{\partial B(\mathbf{x}, 1)} u(r\mathbf{y}) \, dy = r^{d-1} \int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} u(\mathbf{x} + r\mathbf{y}) \, dy. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen die rechte Seite von (1.2) mit $\Phi(r)$. Man erhält also

$$\Phi(r) := \oint_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{s}) \, ds = \oint_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} u(\mathbf{x} + r\mathbf{y}) \, dy. \quad (1.3)$$

Auf Grund der vorausgesetzten Glattheit von u existiert die Ableitung nach r

$$\Phi'(r) = \oint_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} \nabla u(\mathbf{x} + r\mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} \, dy.$$

Rücktransformation der Integrale liefert

$$\Phi'(r) = \oint_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \nabla u(\mathbf{s}) \cdot \frac{\mathbf{s} - \mathbf{x}}{r} \, ds = \oint_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \nabla u(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{n} \, ds,$$

wobei die Darstellung des äußeren Einheits-Normalenvektors an die Kugel $B(\mathbf{x}, r)$ genutzt wurde. Der Gaußsche Satz liefert nun

$$|\partial B(\mathbf{x}, r)|\Phi'(r) = \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} \nabla u(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_{B(\mathbf{x}, r)} \nabla \cdot \nabla u \, d\mathbf{x} = \int_{B(\mathbf{x}, r)} \Delta u \, d\mathbf{x} = 0.$$

Also ist $\Phi(r)$ konstant. Aus der Stetigkeit von u folgt $\Phi(r) \rightarrow u(\mathbf{x})$ für $r \rightarrow 0$, siehe beispielsweise in (1.3): $\Phi(0) = u(\mathbf{x})$. Da Φ konstant ist, gilt damit $\Phi(r) = u(\mathbf{x})$. Das ist die Behauptung. ■

Folgerung 1.3 Variante der Mittelwertformel. Sei $u \in C^2(\Omega)$ mit $\Delta u = 0$ in Ω und $B(\mathbf{x}, r) \subset \Omega$. Für jede Gewichtsfunktion $\varphi : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$\int_{B(\mathbf{0}, r)} \varphi(\|\mathbf{x}\|_2) \, d\mathbf{x} = 1,$$

wobei $\|\mathbf{x}\|_2$ die Euklidische² Norm von \mathbf{x} ist, gilt

$$u(\mathbf{x}) = \int_{B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y})\varphi(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2) \, d\mathbf{y}. \quad (1.4)$$

Beweis: Man erhält die Aussage, indem man das Volumenintegral in verallgemeinerten Polarkoordinaten schreibt. Für $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, r)$ wird die Darstellung $\mathbf{y} = \mathbf{x} + t\mathbf{s}$ mit $t \in [0, r]$ und $\mathbf{s} \in \partial B(\mathbf{0}, 1)$ verwendet. Man erhält, unter Verwendung der Mittelwertformel (1.2) und der Eigenschaft der Gewichtsfunktion,

$$\begin{aligned} \int_{B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y})\varphi(\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\|_2) \, d\mathbf{y} &= \int_0^r \left(\int_{\partial B(\mathbf{0}, 1)} u(\mathbf{x} + t\mathbf{s}) \, ds \right) \underbrace{\varphi(\|t\mathbf{s}\|_2)}_{=t} t^{d-1} \, dt \\ &= u(\mathbf{x}) \underbrace{|\partial B(\mathbf{0}, 1)| \int_0^r \varphi(t)t^{d-1} \, dt}_{= \int_{B(\mathbf{0}, r)} \varphi(\|\mathbf{x}\|_2) \, d\mathbf{x} = 1} = u(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Die Beziehung unter der Klammer sieht man, wenn man in der ersten Zeile $u(\mathbf{y}) = 1$ und $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ setzt. ■

Die Mittelwertformel besagt, dass harmonische Funktionen in jedem Punkt mit ihrem Mittelwert in einer Umgebung übereinstimmen. Es gilt auch die Umkehrung: die Mittelwerteigenschaft charakterisiert harmonische Funktionen.

Satz 1.4 Charakterisierung harmonischer Funktionen. Sei $u \in C^2(\overline{\Omega})$ mit

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\partial B(\mathbf{x}, r)} u \, ds \quad (1.5)$$

für alle Kugeln $B(\mathbf{x}, r) \subset \Omega$. Dann ist u harmonisch.

Beweis: Angenommen, es gilt $\Delta u(\mathbf{x}) \neq 0$ für ein $\mathbf{x} \in \Omega$. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gelte $\Delta u(\mathbf{x}) > 0$. Wegen der Stetigkeit der partiellen zweiten Ableitungen findet man eine Kugel $B(\mathbf{x}, R)$ mit $R > 0$, so dass $\Delta u(\mathbf{y}) > 0$ für alle $\mathbf{y} \in B(\mathbf{x}, R)$. Sei $\Phi(r)$ die rechte Seite von (1.5). Nach Voraussetzung gilt $\Phi(r) = u(\mathbf{x})$, also $\Phi'(r) = 0$. Die Rechnung des Beweises von Satz 1.2 liefert jedoch

$$|\partial B(\mathbf{x}, r)|\Phi'(r) = \int_{B(\mathbf{x}, r)} \Delta u \, d\mathbf{x} > 0$$

für $r \leq R$. Das ist ein Widerspruch. ■

²Euklid (ca. 365 – 300 v. Chr.)

1.2.3 Regularität

Aus der Mittelwertegenschaft folgt eine erstaunliche Regularitätsaussage.

Sei u harmonisch in Ω und $B(\mathbf{x}, r) \subset \Omega$. Wir wählen eine Funktion $\phi : [0, r] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $\phi \in C^\infty([0, r])$. Wir fordern, dass es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $\phi(s) = 0$ für alle $s > r - \varepsilon$. Mit Hilfe dieser Funktion wird eine weitere Funktion definiert:

$$\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}, \quad \psi(\mathbf{x}) = \phi(\|\mathbf{x}\|_2),$$

wobei $\phi(s) = 0$ für $s \geq r$ gesetzt wird. Damit ψ ebenfalls unendlich oft differenzierbar ist, muss ϕ in einer rechtsseitigen Umgebung von $s = 0$ konstant sein. Anderenfalls würde ψ eine Regularitätsabfall in $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ besitzen. Wir fordern $\phi(s) = c > 0$ für alle $s \in [0, \varepsilon]$. Des Weiteren wird ψ (beziehungsweise ϕ) so normiert, dass

$$1 = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_0^r \int_{\partial B(\mathbf{x}, t)} \phi(\|\mathbf{s}\|_2) \, ds \, dt = |\partial B(\mathbf{0}, 1)| \int_0^r t^{d-1} \phi(t) \, dt$$

gilt, siehe Rechnung im Beweis von Folgerung 1.3.

Satz 1.5 Sei $u \in C^2(\Omega)$ eine harmonische Funktion. Dann gilt sogar $u \in C^\infty(\Omega)$.

Beweis: Die konstruierte Gewichtsfunktion ϕ erfüllt die Bedingungen der Gewichtsfunktion aus Folgerung 1.3. Wir betrachten den Differenzenquotienten von $u(\mathbf{x})$ in die k -te Einheitsrichtung \mathbf{e}_k . Der Radius r sei so klein gewählt, dass $B(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k, r) \subset \Omega$. Unter Verwendung von (1.4) erhält man für $0 < h < \varepsilon$

$$\begin{aligned} & \frac{u(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k) - u(\mathbf{x})}{h} \\ &= \frac{1}{h} \left(\int_{B(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k, r)} u(\mathbf{y}) \psi(\mathbf{y} - \mathbf{x} - h\mathbf{e}_k) \, d\mathbf{y} - \int_{B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}) \psi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \, d\mathbf{y} \right) \\ &= \int_{B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}) \frac{\psi(\mathbf{y} - \mathbf{x} - h\mathbf{e}_k) - \psi(\mathbf{y} - \mathbf{x})}{h} \, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Die letzte Gleichung folgt daher, dass h so klein gewählt worden ist, dass ψ nur in $B(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_k, r) \cap B(\mathbf{x}, r)$ ungleich Null ist, siehe Abbildung 1.1.

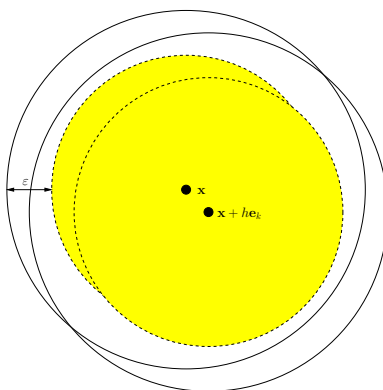


Abbildung 1.1: Skizze zum Beweis von Satz 1.5.

Aus den Voraussetzungen an ψ folgt, dass die rechte Seite für $h \rightarrow 0$ wohldefiniert ist. Folglich erhält man beim Grenzübergang

$$\partial_k u(\mathbf{x}) = - \int_{B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}) \partial_k \psi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \, d\mathbf{y}.$$

Insbesondere folgt damit, dass u differenzierbar ist (was allerdings schon vorausgesetzt ist). Die gleiche Argumentation kann nun wiederholt werden und liefert per Induktion für höhere Ableitungen nach dem Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^d$

$$D^\alpha u(\mathbf{x}) = (-1)^{|\alpha|} \int_{B(\mathbf{x}, r)} u(\mathbf{y}) D^\alpha \psi(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \, d\mathbf{y},$$

wobei $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$. Insbesondere existieren alle Ableitungen von u . ■

Dieses Ergebnis ist erstaunlich, da eigentlich nur die Informationen vorliegen, dass u zweimal differenzierbar ist und dass die Summe der nichtgemischten zweiten Ableitungen für jedes $\mathbf{x} \in \Omega$ verschwindet. Zunächst ist sogar unklar, wie man daraus überhaupt Informationen über einen der Summanden bekommt. Es stellt sich aber heraus, dass man sogar Informationen über alle Ableitungen erhält!

Auch das Beweisprinzip ist bemerkenswert. Man beweist die Differenzierbarkeit mittels der vorausgesetzten Differenzierbarkeit der Testfunktion ψ . Dieses Prinzip werden wir auch bei den Distributionen wieder antreffen, siehe Definition 3.5.

1.2.4 Das Maximumprinzip

Satz 1.6 Maximumprinzip. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt sowie $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ harmonisch in Ω . Dann gelten*

1. *Schwaches Maximumprinzip*

$$\max_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} u(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} u(\mathbf{x}). \quad (1.6)$$

2. *Starkes Maximumprinzip. Falls Ω zusammenhängend ist und das Maximum im Inneren angenommen wird, d.h. $u(\mathbf{x}_0) = \max_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} u(\mathbf{x})$ für ein $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, dann ist u konstant, also*

$$u(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_0) \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega}. \quad (1.7)$$

Beweis: Wir beweisen (1.7). Das schwache Maximumprinzip (1.6) folgt daraus. Sei $u(\mathbf{x}_0) = M := \max_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} u(\mathbf{x})$ für $\mathbf{x}_0 \in \Omega$. Für jede Kugel $B(\mathbf{x}_0, r) \subset \Omega$ gilt nach der Mittelwertformel (1.2)

$$M = \frac{1}{|\partial B(\mathbf{x}_0, r)|} \int_{\partial B(\mathbf{x}_0, r)} u \, d\mathbf{s}.$$

Da u stetig ist und $u(\mathbf{x}) \leq M$ gilt, kann diese Beziehung nur gelten, wenn $u = M$ auf $\partial B(\mathbf{x}_0, r)$ ist. Also gibt es eine offene Umgebung von \mathbf{x}_0 in der $u \equiv M$.

Wir betrachten die Menge $Q := \{\mathbf{x} \in \Omega : u(\mathbf{x}) = M\}$. Für jedes $\mathbf{x} \in Q$ findet man mit den obigen Betrachtungen eine offene Umgebung $U(\mathbf{x}) \subset Q$. Also ist Q eine offene Menge. Wegen der Stetigkeit von u sind aber auch alle Häufungspunkte von Q in Ω wieder in Q enthalten. Da Ω zusammenhängend ist, stimmen Q und Ω überein. *Übungsaufgabe: diesen Schluss detailliert nachvollziehen.* ■

1.2.5 Das Dirichlet-Prinzip

Oft liefert der physikalische Hintergrund des betrachteten Problems eine Größe, die von der Lösung der zu Grunde liegenden Gleichung minimiert wird, eine sogenannte Energie.

Wir betrachten das Dirichlet³-Funktional

$$E(u) := \int_{\Omega} \|\nabla u\|_2^2 \, d\mathbf{x}. \quad (1.8)$$

³Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805–1859)

Da im physikalischen System die Randbedingungen eine entscheidende Rolle spielen, betrachten wir für stetiges $g : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ nur Funktionen aus dem Raum

$$V := \{u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) : u|_{\partial\Omega} = g\}.$$

Satz 1.7 Dirichlet–Prinzip. *Sei Ω offen und $u \in V$ ein Funktion mit*

$$E(u) = \min_{v \in V} E(v).$$

Dann ist u eine harmonische Funktion.

Beweis: Wir wählen eine Funktion $w \in C^2(\Omega)$ mit kompaktem Träger in Ω und $\varepsilon \in \mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} : x > 0\}$. Damit definieren wir die gestörte Funktion $u_\varepsilon := u + \varepsilon w$. Es gilt $u_\varepsilon \in V$ und wegen der Minimalität des Dirichlet–Funktional von u gilt (als notwendige Bedingung)

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} E(u_\varepsilon) \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{d}{d\varepsilon} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla u + 2\varepsilon \nabla u \cdot \nabla w + \varepsilon^2 \nabla w \cdot \nabla w \, dx \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \left. \int_{\Omega} 2\nabla u \cdot \nabla w + 2\varepsilon \nabla w \cdot \nabla w \, dx \right|_{\varepsilon=0} = \int_{\Omega} 2\nabla u \cdot \nabla w \, dx. \end{aligned}$$

Nun wird partiell integriert. Dabei tritt kein Randterm auf, da w kompakten Träger besitzt

$$0 = \int_{\Omega} 2\nabla u \cdot \nabla w \, dx = 2 \int_{\Omega} (-\Delta u) w \, dx.$$

Da w beliebig war, gilt $\Delta u = 0$. ■

Man kann mit Hilfe des Dirichlet–Prinzips ein Verfahren konstruieren, um die Laplace–Gleichung zu lösen.

1.3 Eigenschaften anderer partieller Differentialgleichungen

1.3.1 Eindeutigkeit der Poisson–Gleichung

Satz 1.8 *Seien $g \in C(\partial\Omega)$ und $f \in C(\Omega)$ gegeben. Dann gibt es höchstens ein $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, welches die Poisson–Gleichung*

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

löst.

Beweis: Seien u und v zwei Lösungen der Poisson–Gleichung zu den gleichen Daten. Dann erfüllt die Differenz $w = u - v \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ die Gleichung

$$-\Delta w = 0 \quad \text{in } \Omega, \quad w = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Das heißt, w ist harmonisch. Nach dem schwachen Maximumprinzip (1.6) nimmt w sein Maximum auf dem Rand an, also ist $w \leq 0$ in $\overline{\Omega}$. Gleichzeitig ist aber auch $-w$ harmonisch und nimmt sein Maximum auf dem Rand an, das heißt $-w \leq 0$ in $\overline{\Omega}$. Daraus folgt $w \equiv 0$ und damit $u = v$. ■

Für vorgegebene Daten (rechte Seite und Randwerte) ist die Lösung also eindeutig. Es bleibt noch die Frage zu klären, ob überhaupt eine Lösung existiert, siehe Satz 5.3.

1.3.2 Das Maximumprinzip für die Wärmeleitungsgleichung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und beschränkt mit C^1 -Rand. Wir betrachten für $T > 0$ den Raum-Zeit-Zylinder $\Omega_T = \Omega \times (0, T] \subset \mathbb{R}^{d+1}$.

Als parabolischen Rand des Zylinders bezeichnet man die Menge $\Gamma_T := \overline{\Omega_T} \setminus \Omega_T$, das heisst der parabolische Rand ist die Vereinigung der seitlichen Ränder und des Randes $t = 0$. Aus der Intuition kann man erwarten, dass die Temperatur u niemals größer wird, als dies durch die Randwerte auf Γ_T vorgegeben ist, sofern es keine Wärmequelle in Ω gibt. Das soll jetzt bewiesen werden.

Satz 1.9 Parabolisches Maximumprinzip. *Sei $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$ eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung*

$$\partial_t u = \Delta u \quad \text{in } \Omega_T. \quad (1.9)$$

Dann gilt

$$\max_{(\mathbf{x}, t) \in \overline{\Omega_T}} u(\mathbf{x}, t) \leq \max_{(\mathbf{x}, t) \in \overline{\Gamma_T}} u(\mathbf{x}, t). \quad (1.10)$$

Beweis: Man kann annehmen, dass $\max_{(\mathbf{x}, t) \in \overline{\Gamma_T}} u(\mathbf{x}, t) = 1$, andernfalls wird eine entsprechende Konstante zu u addiert oder von u subtrahiert. Angenommen, es gilt $u(\mathbf{x}_0, T) = 1 + \varepsilon$ für ein $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ und $\varepsilon > 0$. Diese Annahme soll zu einem Widerspruch geführt werden.

Dazu betrachtet man die Funktion

$$v(\mathbf{x}, t) := e^{\lambda(T-t)} u(\mathbf{x}, t).$$

Für $0 < \lambda < \ln(1 + \varepsilon/2)/T$; ($e^{\lambda T} < 1 + \varepsilon/2$) gilt $v \leq 1 + \varepsilon/2$ auf Γ_T . Im Punkt (\mathbf{x}_0, T) gilt $v(\mathbf{x}_0, T) = 1 + \varepsilon$. Also besitzt v genauso wie u ein inneres Maximum:

$$v(\mathbf{x}_1, t_1) = \max_{(\mathbf{x}, t) \in \overline{\Omega_T}} v(\mathbf{x}, t) > \max_{(\mathbf{x}, t) \in \overline{\Gamma_T}} v(\mathbf{x}, t).$$

Die Funktion v löst auf Ω_T die partielle Differentialgleichung

$$\partial_t v = -\lambda v + \Delta v.$$

Der Punkt (\mathbf{x}_1, t_1) ist ein lokales Maximum. Falls $t_1 < T$, verschwindet der Gradient (notwendige Bedingung), also gilt insbesondere $\partial_t v(\mathbf{x}_1, t_1) = 0$. Ist $t_1 = T$, dann gilt wegen der Maximaleigenschaft $\partial_t v(\mathbf{x}_1, t_1) \geq 0$. Ein weiteres notwendiges Kriterium besteht darin, dass $\Delta v(\mathbf{x}_1, t_1) \leq 0$ (betrachte die Ableitungen in die jeweiligen Koordinatenrichtungen und die notwendigen eindimensionalen Kriterien). Das Argument ist unabhängig von t_1 gültig, da $\mathbf{x}_1 \in \Omega$. Es folgt für den Punkt (\mathbf{x}_1, t_1)

$$0 \leq \partial_t v(\mathbf{x}_1, t_1) = (-\lambda v + \Delta v)(\mathbf{x}_1, t_1) \leq -\lambda v(\mathbf{x}_1, t_1) < 0.$$

Das ist ein Widerspruch, also besitzt v kein inneres Maximum. Aus der Definition von v folgt, dass damit auch u kein inneres Maximum besitzt. ■

Genauso wie bei der Poisson-Gleichung liefert das Maximumprinzip eine Eindeutigkeitsaussage.

Folgerung 1.10 Eindeutigkeit. *Für $f \in C(\Omega_T)$, $u_0 \in C(\overline{\Omega})$ und $g \in C(\partial\Omega \times [0, T])$ gibt es höchstens ein $u \in C^2(\Omega_T) \cap C(\overline{\Omega_T})$, welches die inhomogene Wärmeleitungsgleichung*

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f && \text{in } \Omega_T, \\ u &= g && \text{auf } \partial\Omega \times [0, T], \\ u(\cdot, 0) &= u_0 && \text{auf } \Omega \end{aligned}$$

löst.

1.3.3 Elementare Lösung einer Transportgleichung

Wir betrachten zunächst die homogene Transportgleichung erster Ordnung

$$\partial_t u + \partial_x u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty). \quad (1.11)$$

Das räumliche Gebiet besitzt keinen Rand. Wir wollen das Anfangswertproblem lösen, das heißt, wir suchen eine Lösung, die zum Zeitpunkt $t = 0$ eine gegebene Anfangsbedingung

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad \text{mit } u_0 \in C^1(\mathbb{R}) \quad (1.12)$$

erfüllt.

Eine Lösung von (1.11), (1.12) lässt sich unmittelbar angeben, nämlich

$$u(x, t) = u_0(x - t).$$

Das Erfülltsein der Anfangsbedingung ist offensichtlich. Es folgt mit Kettenregel

$$\partial_t u(x, t) = u'_0(x - t) \frac{d(x - t)}{dt} = -u'_0(x - t) = -\partial_x u(x, t).$$

Die Lösung verschiebt also einfach die Startwerte in der Zeit nach rechts.

Man sieht zum einen, dass die Lösung mit der Zeit nicht glatter wird, sondern immer in $C^1(\mathbb{R})$ für jeden Zeitpunkt ist. Man sagt, dass die Gleichung nicht glättet.

Zum anderen sieht man, dass Informationen über den Anfangswert in einem vorgegebenen Punkt zu einer gewissen Zeit t nicht alle Punkten von \mathbb{R} beeinflussen. Zum Beispiel wird die Information von $u_0(0)$ zur Zeit t nur von Punkten mit $0 \leq x \leq t$ wahrgenommen. Man spricht von einer endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit. Diese Eigenschaft ist im Gegensatz zur Wärmeleitungsgleichung, siehe Lemma 8.7. Dort werden die Anfangswerte nach beliebig kurzer Zeit überall in Ω wahrgenommen.

Wir betrachten nun die inhomogene Transportgleichung

$$\partial_t u + \partial_x u = f \quad \text{in } \mathbb{R} \times [0, \infty), \quad (1.13)$$

wobei $f \in C^1(\mathbb{R} \times [0, \infty))$ ist.

Wie bei linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen gilt auch hier eine Art Superpositionsprinzip, um eine Lösung von (1.13) zu finden. Für die homogene Gleichung (1.11) gilt, dass entlang der Linien (Charakteristiken) $(x - t + s, s)$, $s \geq 0$, die Lösung u konstant ist. Für die inhomogene Gleichung gilt, dass entlang dieser Linien u um den Wert f zunimmt. Aus dieser Überlegung kann man einen Ansatz für die Lösung der inhomogenen Gleichung gewinnen

$$u(x, t) = u_0(x - t) + \int_0^t f(x - t + s, s) ds. \quad (1.14)$$

Einsetzen zeigt, dass der Ansatz richtig ist. *Übungsaufgabe.*

Diese Herangehensweise nennt man das Prinzip der Charakteristiken.

1.3.4 Eine Wellengleichung

Die einfachste Wellengleichung zweiter Ordnung lautet

$$\partial_t^2 u = \Delta u. \quad (1.15)$$

Zu ihrer Herleitung betrachten wir die vertikale Auslenkung u einer dünnen, unendlich ausgedehnten, horizontalen Membran falls $d = 2$ (einer Saite für $d = 1$). Im einfachsten Modell sind die vertikalen Kräfte durch ∇u gegeben, das heißt,

über einer Linie $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ mit Einheitsnormalen \mathbf{n} wird die vertikale Kraft $\nabla u \cdot \mathbf{n}$ übertragen. Das ist das Hooke'sche Gesetz Kraft \sim Auslenkung ($F \sim u$). Nun verwendet man das Newton'sche Gesetz Beschleunigung \sim Kraft ($\partial_t^2 u \sim F$) zur Beschreibung der Kinetik. Für ein beliebiges Volumen $V \subset \mathbb{R}^2$ gilt dann, nach Normalisierung

$$\int_V \partial_t^2 u \, d\mathbf{x} = \int_{\partial V} \nabla u \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_V \Delta u \, d\mathbf{x}.$$

Bei dieser Herleitung haben wir wieder den Gaußschen Satz angewendet. Da V beliebig ist, folgt die Wellengleichung (1.15).

Wir betrachten hier die eindimensionale Wellengleichung

$$\partial_t^2 u = \partial_x^2 u \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty) \quad (1.16)$$

mit den vorgegebenen Anfangsbedingungen

$$u(\cdot, 0) = u_0, \quad \partial_t u(\cdot, 0) = u_1 \quad \text{in } \mathbb{R},$$

mit $u_0, u_1 \in C^2(\mathbb{R})$. Das heißt, die Auslenkung der Saite und ihre Geschwindigkeit zum Zeitpunkt $t = 0$ sind gegeben.

Zwei Lösungen von (1.16) (ohne Anfangsbedingungen) lassen sich elementar angeben, nämlich für beliebige $\phi, \psi \in C^2(\mathbb{R})$

$$u(x, t) = \phi(x + t), \quad u(x, t) = \psi(x - t).$$

Das rechnet man durch Einsetzen nach.

Man kann nun versuchen, mit Hilfe dieser beiden sogenannten Elementarlösungen, eine Lösung zu konstruieren, die auch die Anfangsbedingungen erfüllt. Dazu schreiben wir zunächst die Gleichung (1.16) in der Form

$$(\partial_t + \partial_x)(\partial_t - \partial_x)u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, \infty).$$

Die Funktion

$$v(x, t) := (\partial_t - \partial_x)u(x, t)$$

löst nun offensichtlich folgendes Anfangswertproblem

$$(\partial_t + \partial_x)v = 0, \quad v(\cdot, 0) = u_1 - \partial_x u_0.$$

Das ist eine Transportgleichung wie sie im Abschnitt 1.3.3 behandelt wurde. Man findet die Lösung

$$v(x, t) = (u_1 - \partial_x u_0)(x - t).$$

Nun muss man für u die inhomogene Transportgleichung

$$(\partial_t - \partial_x)u(x, t) = v(x, t)$$

lösen. Dazu verwenden wir die Darstellung (1.14), wobei wir das negative Vorzeichen vor der Ortsableitung beachten müssen

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_0(x + t) + \int_0^t v(x + t - s, s) \, ds \\ &= u_0(x + t) + \int_0^t (u_1 - \partial_x u_0)(x + t - 2s) \, ds \\ &= u_0(x + t) + \frac{1}{2}(u_0(x - t) - u_0(x + t)) - \frac{1}{2} \int_{x+t}^{x-t} u_1(y) \, dy \\ &= \frac{1}{2}(u_0(x + t) + u_0(x - t)) + \frac{1}{2} \int_{x-t}^{x+t} u_1(y) \, dy. \end{aligned}$$

Das ist die sogenannte d'Alembertsche⁴ Lösungsformel für die eindimensionale Wellengleichung. Durch Einsetzen kann man leicht verifizieren, dass sie tatsächlich eine Lösung des Anfangswertproblems der eindimensionalen Wellengleichung liefert.

Die Anfangswerte u_0 werden auch bei der Wellengleichung nur transportiert und nicht geglättet.

⁴Jean Le Rond d'Alembert (1717 – 1783)

Kapitel 2

Der Gaußsche Satz

Partielle Differentialgleichung sind typischerweise auf beschränkten Gebieten des $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 1$, zu lösen. Dabei sind die Eigenschaften dieser Gebiete von Bedeutung, insbesondere die Beschaffenheit ihres Randes.

2.1 Glattheit von Gebietsrändern

Definition 2.1 Rand von der Klasse $C^{k,\alpha}$. Ein beschränktes Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ und sein Rand Γ sind von der Klasse $C^{k,\alpha}$, $0 \leq \alpha \leq 1$, wenn für alle $\mathbf{x}_0 \in \Gamma$ eine Kugel $B(\mathbf{x}_0, r)$ mit $r > 0$ und eine bijektive Abbildung $\psi : B(\mathbf{x}_0, r) \rightarrow D \subset \mathbb{R}^d$ existiert mit

- 1) $\psi(B(\mathbf{x}_0, r) \cap \Omega) \subset \mathbb{R}_+^d$,
- 2) $\psi(B(\mathbf{x}_0, r) \cap \Gamma) \subset \partial\mathbb{R}_+^d$,
- 3) $\psi \in C^{k,\alpha}(B(\mathbf{x}_0, r))$, $\psi^{-1} \in C^{k,\alpha}(D)$, Hölder-stetig.

Das heißt, Γ ist der Graph einer Funktion von $d - 1$ Veränderlichen. □

Wir werden oft voraussetzen, dass Ω zur Klasse $C^{0,1}$ gehört. Da dies bedeutet, dass die Abbildung Lipschitz¹-stetig ist, sagt man zu einem $C^{0,1}$ -Rand auch Lipschitz-Rand.

Beispiel 2.2 Beispiele und Gegenbeispiele für Lipschitz-Gebiete. Gebiete mit Lipschitz-Rand sind zum Beispiel Kugeln oder polygonal/polyhedral berandete Gebiete, bei denen das Gebiet jeweils nur auf einer Seite des Randes liegt.

Ein Gebiet, das nicht zur Klasse $C^{0,1}$ gehört ist ein Kreis mit einem Schlitz

$$\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\} \setminus \{(x, y) : x \geq 0, y = 0\}.$$

□

Falls Ω beschränkt ist, ist $\partial\Omega$ kompakt (abgeschlossen und beschränkt). Es gibt also eine Überdeckung von $\partial\Omega$ mit endlich vielen Zylindern U_1, \dots, U_m gemäß der Definition von Kompaktheit. In den folgenden Beweisen nehmen wir oft eine offene Menge U_0 hinzu, die $\Omega \setminus (U_1 \cup \dots \cup U_m)$ überdeckt. Die Überdeckung wird mit (U_j) bezeichnet.

Zur Überdeckung (U_j) werden wir in Beweisen oft eine zugehörige Teilung (Zerlegung) der 1 wählen, also $m + 1$ Funktionen $\eta_j \in C_0^\infty(U_j)$, $\eta_j : U_j \rightarrow [0, 1]$, mit $\sum_{j=0}^m \eta_j = 1$ auf $\bar{\Omega}$.

¹Rudolf Otto Sigismund Lipschitz (1832 – 1903)

2.2 Randintegrale

Das Ziel dieses Abschnitts besteht in der Definition von $\int_{\Gamma} f \, ds$ für $(d-1)$ -dimensionale Mannigfaltigkeiten $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, dass Γ lokal Graph einer Lipschitz-Funktion ist.

Für eine entsprechende Überdeckung von Γ mit Zylindern U_j , $j = 1, \dots, m$, wählen wir eine zugehörige Teilung der 1, η_j , und setzen

$$\int_{\Gamma} f \, ds := \sum_{j=1}^m \int_{\Gamma \cap U_j} f \eta_j \, ds. \quad (2.1)$$

Damit reicht es, die Terme auf der rechten Seite zu definieren, also Integrale über Graphen.

Sei also im Folgenden U ein Zylinder $U = V \times I$ mit $V \subset \mathbb{R}^{d-1}$ und $I = (a, b)$. Weiterhin sei $g : V \rightarrow I$ Lipschitz-stetig. Als Graph von g bezeichnen wir

$$\Gamma := \text{graph}(g) := \{(\mathbf{x}, y) : \mathbf{x} \in V, y = g(\mathbf{x})\}.$$

Wir werden folgendes Resultat ohne Beweis verwenden.

Satz 2.3 Satz von Rademacher² Sei $g \in C^{0,1}(V)$ mit der Lipschitz-Norm

$$\|g\|_{\text{Lip}} := \|g\|_C + \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega} \frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2}.$$

Dann ist g fast überall differenzierbar und es gilt

$$\|\nabla g\|_{L^\infty} \leq \|g\|_{\text{Lip}}.$$

Beweis: Siehe zum Beispiel Evans, Abschnitt 5.8, Theorem 6. ■

Definition 2.4 Randfunktion ist messbar beziehungsweise integrierbar.

Wir nennen eine Funktion $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ messbar beziehungsweise integrierbar, wenn die Verkettung $\mathbf{x} \mapsto f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))$ messbar beziehungsweise integrierbar ist. Dann setzen wir

$$\int_{\Gamma} f \, ds := \int_V f(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \sqrt{1 + \|\nabla g(\mathbf{x})\|_2^2} \, d\mathbf{x}. \quad (2.2)$$

□

Bemerkung 2.5 Zur Definition:

- Der Satz von Rademacher, Satz 2.3, sichert, dass das Integral von $(f \circ g) \sqrt{1 + \|\nabla g(\mathbf{x})\|_2^2}$ existiert.
- Der Faktor $\sqrt{1 + \|\nabla g(\mathbf{x})\|_2^2}$ sorgt dafür, dass das Integral unabhängig ist von der Wahl von V und g . Das kann mit der Transformationsformel zwischen $(d-1)$ -dimensionalen Integrationsgebieten V und \tilde{V} gezeigt werden, siehe unten.

□

Die Graphenkonstruktion liefert schnell geeignete Definitionen und ist auch die im Satz von Gauß verwendete Konstruktion. Im allgemeinen ist es aber günstiger, die Integrale über allgemeine Parametrisierungen zu berechnen und nicht über Graphen.

²Hans Rademacher (1892 – 1969)

Beispiel 2.6 Für die Kreislinie $\Gamma := \partial B(\mathbf{0}, R) \subset \mathbb{R}^2$ und eine Funktion $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ soll $\int_{\Gamma} f ds$ berechnet werden. Dabei soll Γ nicht lokal als Graph geschrieben werden. Stattdessen wird mit

$$\Phi : \tilde{V} := [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \Phi(t) = (R \cos(t), R \sin(t)) \quad (2.3)$$

parametrisiert. Φ ist invertierbar als Abbildung $\Phi : \tilde{V} \rightarrow \Gamma$. Das Ziel besteht darin, eine Formel der Gestalt

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_{\tilde{V}} f(\Phi(y))J(y) dy = \int_0^{2\pi} f(R \cos(t), R \sin(t))J(t) dt$$

zu finden. Dafür muss der richtige Faktor $J(t)$ bestimmt werden. \square

Die Bestimmung des richtigen Faktors wird jetzt allgemein untersucht. Es genügt, die Situation lokal zu betrachten. Wir nehmen also an, dass wir Γ als Graph schreiben können, $\Gamma = \text{graph}(g)$, mit $g : V \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz-stetig. Nun sei eine andere Parametrisierung

$$\Phi : \tilde{V} \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \tilde{V} \subset \mathbb{R}^{d-1}, \quad \Gamma = \Phi(\tilde{V})$$

gegeben. Wir fordern von Φ , dass Φ invertierbar ist auf Γ und dass die Wechselabbildung

$$\psi : V \rightarrow \tilde{V}, \quad \mathbf{x} \mapsto \Phi^{-1} \circ G, \quad G(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))$$

Lipschitz-stetig ist. Es soll nun gezeigt werden, dass das Integral von f über Γ wie folgt berechnet werden kann

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_{\tilde{V}} (f \circ \Phi) \sqrt{\det(D\Phi^T D\Phi)} d\tilde{\mathbf{x}}, \quad (2.4)$$

wobei die Jacobi³-Matrix mit D bezeichnet wird

$$(D\Phi)_{ij} := \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}, \quad i, j = 1, \dots, d.$$

Wir verwenden den Transformationssatz in \mathbb{R}^{d-1} für die Wechselabbildung $\psi = \Phi^{-1} \circ G$

$$\int_{\tilde{V}} (f \circ \Phi) \sqrt{\det(D\Phi^T D\Phi)} d\mathbf{x} = \int_V (f \circ \Phi \circ \psi) \sqrt{\det(D\Phi^T D\Phi)} |\det(D\psi)| d\mathbf{x}.$$

Nun wird der Faktor im Integranden auf der rechten Seite umgeformt. Dabei werden $\det(A) = \det(A^T)$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ und die Kettenregel genutzt:

$$\begin{aligned} \sqrt{\det(D\Phi^T D\Phi)} |\det(D\psi)| &= \sqrt{\det(D\Phi^T D\Phi)} \sqrt{\det(D\psi^T D\psi)} \\ &= \sqrt{\det(D\psi^T D\Phi^T D\Phi D\psi)} \\ &= \sqrt{\det(D(\Phi \circ \psi)^T D(\Phi \circ \psi))} \\ &= \sqrt{\det(DG^T DG)} \\ &= \sqrt{1 + \|\nabla g\|_2^2}. \end{aligned}$$

Um den letzten Schritt zu verstehen, muss man sich die Struktur von $DG^T DG$ näher ansehen:

$$(DG)_{ij} = \delta_{ij} + \partial_i g \implies (DG^T DG)_{ij} = \delta_{ij} + \partial_i g \partial_j g,$$

³Carl Gustav Jacob Jacobi (1804 – 1851)

wobei δ_{ij} das Kronecker⁴-Symbol bezeichnet. Für Matrizen der Form $I + \mathbf{a}\mathbf{a}^T$, wobei I die Einheitsmatrix der entsprechenden Dimension ist und \mathbf{a} ein entsprechender Vektor, gilt nun $\det(I + \mathbf{a}\mathbf{a}^T) = 1 + \|\mathbf{a}\|_2^2$. Anwendung auf $DG^T DG$ liefert den letzten Schritt.

Nun wird das Ergebnis in die Integraldarstellung eingesetzt und man erhält

$$\int_{\tilde{V}} (f \circ \Phi) \sqrt{\det(D\Phi^T D\Phi)} d\tilde{\mathbf{x}} = \int_V (f \circ G) \sqrt{1 + \|\nabla g\|_2^2} d\mathbf{x},$$

also Formel (2.2). Insbesondere ist damit gezeigt, dass die rechte Seite in (2.4) unabhängig vom Zylinder \tilde{V} und der Parametrisierung Φ ist.

Beispiel 2.7 *Fortsetzung von Beispiel 2.6.* Aus der Parametrisierung (2.3) der Kreislinie folgt

$$D\Phi(t) = (-R \sin(t), R \cos(t))^T \implies D\Phi(t)^T D\Phi(t) = R^2 \in \mathbb{R}^{1 \times 1}.$$

Die Wurzel der Determinante ist R und man erhält

$$\int_{\Gamma} f ds = \int_0^{2\pi} f(R \cos(t), R \sin(t)) R dt.$$

□

2.3 Der Satz von Gauß für glatte Integranden

Satz 2.8 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ beschränkt mit einem Lipschitz-Rand und $u, v \in C_0^1(\mathbb{R}^d)$. Dann gelten für $i = 1, \dots, d$ und die äußere Einheitsnormale \mathbf{n} an $\partial\Omega$*

$$\int_{\Omega} \partial_i u d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} u \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n} ds, \quad (2.5)$$

$$\int_{\Omega} u \partial_i v + \partial_i uv d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} uv \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n} ds, \quad (2.6)$$

wobei \mathbf{e}_i der kartesische Einheitsvektor in die i -te Koordinatenrichtung ist.

Beweis: Die Formel (2.6) der partiellen Integration folgt aus (2.5) durch Einsetzen von uv und Produktregel. Der Beweis von (2.5) erfolgt in drei Schritten.

Schritt 1: Reduktion auf Graphen. Um (2.5) zu zeigen, lokalisieren wir zuerst u mit der Teilung der 1 (η_j) und schreiben

$$u = \sum_{j=0}^m \eta_j u.$$

Es reicht dann, (2.5) für Funktionen mit Träger in einem U_j zu zeigen. Hat man nämlich das lokale Ergebnis

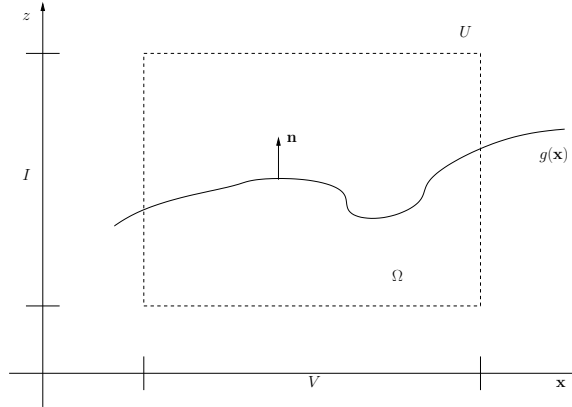
$$\int_{\Omega \cap U_j} \partial_i (u \eta_j) d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega \cap U_j} u \eta_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n} ds, \quad (2.7)$$

⁴Leopold Kronecker (1823 – 1891)

so erhält man durch Summation, Beachtung der Träger von η_j , (2.7) und Produktregel

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} u \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n} \, ds &= \int_{\partial\Omega} \sum_{j=0}^m (u\eta_j) \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n} \, ds = \sum_{j=0}^m \int_{\partial\Omega \cap U_j} u\eta_j \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{n} \, ds \\ &= \sum_{j=0}^m \int_{\Omega \cap U_j} (\partial_i u \eta_j + u \partial_i \eta_j) \, d\mathbf{x} = \sum_{j=0}^m \int_{\Omega} (\partial_i u \eta_j + u \partial_i \eta_j) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \partial_i u \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} u \underbrace{\partial_i \sum_{j=0}^m \eta_j}_{=1} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \partial_i u \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Schritt 2: Beweis für C^1 -Graphen. Wir können also nun u mit Träger in U_j betrachten.



Für U_0 verschwindet das Integral $\int_{U_0} \partial_i u \, d\tilde{\mathbf{x}}$. (*Übungsaufgabe*) (Mit $\tilde{\mathbf{x}}$ werden jetzt die d -dimensionalen Punkte bezeichnet.)

Betrachte nun $U = U_j, 1 \leq j \leq m$. Wir haben $U = V \times I \subset \mathbb{R}^d$ mit $V \subset \mathbb{R}^{d-1}$, $g : V \rightarrow I$ und die Punkte von Ω seien durch $\Omega = \{(\mathbf{x}, y) \in U : y < g(\mathbf{x})\}$ gekennzeichnet. Wir nehmen an, dass $g \in C^1(V)$. Die Tangentialebene im Punkt $(x_1, \dots, x_{d-1})^T$ hat die Gestalt

$$x_d = \nabla g \cdot (x_1, \dots, x_{d-1}),$$

also gilt für den Einheitsnormalenvektor an $\partial\Omega$ (Nenner ist die Normierung)

$$\mathbf{n}(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) = \frac{(-\nabla g, 1)^T}{\sqrt{1 + \|\nabla g\|_2^2}}.$$

Da u seinen Träger in U hat, ist $\int_{\Omega \cap U} \nabla u \, d\tilde{\mathbf{x}} = \int_{\Omega} \nabla u \, d\tilde{\mathbf{x}}$. Transformiert man das Kurvenintegral über $\partial\Omega \cap U$ in ein Integral über V , Formel(2.2),

$$\int_{\partial\Omega \cap U} \frac{u(-\nabla g, 1)^T}{\sqrt{1 + \|\nabla g\|_2^2}} \, ds = \int_V u(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) (-\nabla g(\mathbf{x}), 1)^T \, d\mathbf{x},$$

so muss man zum Beweis von (2.7) zeigen, dass

$$\int_{\Omega} \nabla u \, d\tilde{\mathbf{x}} = \int_V u(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) (-\nabla g(\mathbf{x}), 1)^T \, d\mathbf{x} \quad (2.8)$$

gilt Zu diesem Zweck betrachten wir eine neue Funktion $v : V \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$v(\mathbf{x}, z) := u(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}) + z), \quad \tilde{\mathbf{x}} = (\mathbf{x}, z)^T.$$

Integrale von u über Ω entsprechen nun Integralen von v über $\Sigma := V \times (-\infty, 0)$, siehe obige Festlegung der Punkte von Ω . Wegen eindimensionaler partieller Integration und dem Verschwinden der Randintegrale (kompakter Träger) gilt

$$\int_{\Sigma} \partial_i v \, d\tilde{\mathbf{x}} = 0, \quad 1 \leq i \leq d-1.$$

Bei der partiellen Ableitung in Richtung \mathbf{e}_d verschwindet nur das Randintegral in $-\infty$ und man erhält

$$\int_{\Sigma} \partial_d v \, d\tilde{\mathbf{x}} = \int_V v(\mathbf{x}, 0) \, d\mathbf{x}.$$

Wir betrachten zunächst den Fall $i < d$. Mittels Kettenregel, Transformationsformel der Integrale über u und v und nochmaliger eindimensionaler partieller Integration erhält man

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Sigma} \partial_i v \, d\tilde{\mathbf{x}} = \int_{\Sigma} \partial_i u \, d\tilde{\mathbf{x}} + \int_{\Sigma} \underbrace{\partial_d u(\mathbf{x}, g(\mathbf{x}))}_{\tilde{\mathbf{x}}} \partial_i g(\mathbf{x}) \, d\tilde{\mathbf{x}} \\ &= \int_{\Omega} \partial_i u \, d\tilde{\mathbf{x}} + \int_V \left(\int_{-\infty}^0 \partial_d v(\mathbf{x}, z) \, dz \right) \partial_i g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \partial_i u \, d\tilde{\mathbf{x}} + \int_V v(\mathbf{x}, 0) \partial_i g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} \partial_i u \, d\tilde{\mathbf{x}} + \int_V u(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \partial_i g(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Das ist (2.8) für $i < d$. Für $i = d$ gilt mit der Definition von v und der Festlegung der Punkte von Ω

$$\int_V u(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = \int_V v(\mathbf{x}, 0) \, d\mathbf{x} = \int_{\Sigma} \partial_d v \, d\tilde{\mathbf{x}} = \int_{\Omega} \partial_d u \, d\tilde{\mathbf{x}}.$$

Schritt 3: Beweis für Lipschitz-Graphen. Wir approximieren ein allgemeines $g \in C^{0,1}(V)$ durch Funktionen aus $C^1(V)$. Dazu wird $p < \infty$ fixiert. Die Approximationen können so gewählt werden, dass $g_k \rightarrow g$ in $C(V)$ und $\nabla g_k \rightarrow \nabla g$ in $L^p(V)$, Existenz siehe später im Satz 4.4. Für jede Funktion g_k gilt das lokale Resultat (2.8) nach Schritt 2

$$\int_{\Omega_k} \nabla u \, d\tilde{\mathbf{x}} = \int_V u(\mathbf{x}, g_k(\mathbf{x})) (-\nabla g_k(\mathbf{x}), 1)^T \, d\mathbf{x}$$

(lokal: u hat nur Träger in U). Für $k \rightarrow \infty$ konvergieren auf der linken Seite die Integrationsgebiete gleichmäßig und ∇u ist beschränkt. Auf der rechten Seite konvergieren $u(\cdot, g_k(\cdot)) \rightarrow u(\cdot, g(\cdot))$ ebenfalls gleichmäßig und $\nabla g_k \rightarrow \nabla g$ in $L^p(V)$. Damit können wir auf beiden Seiten zum Grenzwert übergehen und wir erhalten das lokale Ergebnis

$$\int_{\Omega} \nabla u \, d\tilde{\mathbf{x}} = \int_V u(\mathbf{x}, g(\mathbf{x})) (-\nabla g(\mathbf{x}), 1)^T \, d\mathbf{x}.$$

Addition der lokalen Ergebnisse liefert nach Schritt 1 die Behauptung des Satzes. ■

Kapitel 3

Distributionen

In diesem Kapitel sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen, aber nicht notwendig beschränkt.

Eine Funktion $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist ganz sicher Lösung der Gleichung $-\Delta u = f$, falls $u \in C^2(\Omega)$, $f \in C(\Omega)$ und die Gleichung in jedem Punkt $\mathbf{x} \in \Omega$ erfüllt ist. Unser Ziel besteht aber darin, einen allgemeineren Lösungsbegriff zu entwickeln, der zum Beispiel auch für rechte Seiten $f \in L^2(\Omega)$ sinnvoll ist.

Definition 3.1 *Raum der Testfunktionen \mathcal{D} .* Sei

$$\mathcal{D} := C_0^\infty(\Omega)$$

der Raum der unendlich oft differenzierbaren Funktionen mit kompaktem Träger in Ω . \square

Wir können eine beliebige $L^1(\Omega)$ -Funktion f auffassen als eine Linearform $\langle f \rangle$ auf dem Raum \mathcal{D} . Dabei identifiziert man f mit

$$\langle f \rangle : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto \int_{\Omega} f \varphi \, d\mathbf{x}.$$

Jedes $f \in L^1(\Omega)$ definiert eine solche Form. Streng genommen reicht dafür die sogar die lokale Integrierbarkeit, also $f \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Der Raum $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ ist der Raum der lokal integrierbaren Funktionen, d.h. für jede kompakte Teilmenge $\Omega' \subset \Omega$ gilt

$$\int_{\Omega'} |u(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} < \infty \quad \forall u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega).$$

Auch umgekehrt gilt, falls für $f, g \in L^1(\Omega)$ die Linearformen übereinstimmen, $\langle f \rangle = \langle g \rangle$, dann gilt schon $f = g$ (im Sinne des $L^1(\Omega)$). Eine mit einer $L^1(\Omega)$ -Funktion darstellbare Linearform hat also eine eindeutige Darstellung.

Definition 3.2 *Distributionen \mathcal{D}' .* Eine Form u heißt Distribution, $u \in \mathcal{D}'$, falls

1. $u : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$ ist linear,
2. für alle $K \subset \Omega$ mit K kompakt existieren ein $c = c(K)$ und ein $m = m(K)$ mit

$$|u(\varphi)| \leq c \|\varphi\|_{C^m} \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}, \text{supp}(\varphi) \subset K. \quad (3.1)$$

\square

Eine Distribution ist also eine Form, deren Argument eine unendlich oft differenzierbare Funktion mit kompaktem Träger ist.

Beispiel 3.3 Für $f \in L^1(\Omega)$ ist $\langle f \rangle$ linear auf \mathcal{D} und (3.1) ist mit $c = \|f\|_{L^1}$ und $m = 0$ für alle K erfüllt:

$$|\langle f \rangle(\varphi)| = \left| \int_{\Omega} f \varphi \, d\mathbf{x} \right| \leq \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |\varphi| \int_{\Omega} |f| \, d\mathbf{x} = \|\varphi\|_{C^0} \|f\|_{L^1}.$$

Distributionen mit dieser Darstellung heißen regulär, anderenfalls singular. \square

Beispiel 3.4 *Dirac¹-Distribution, δ -Distribution.* Für $\mathbf{a} \in \Omega$ ist die Abbildung

$$\delta_{\mathbf{a}} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}, \varphi \mapsto \varphi(\mathbf{a}) \quad (3.2)$$

eine Distribution. Linearität ist klar, die Forderung (3.1) ist mit $m = 0$ und $c = 1$ erfüllt. (Übungsaufgabe) Dies ist eine singuläre Distribution. \square

Als nächstes wollen wir uns die Differentiation von Distributionen ansehen.

Definition 3.5 *Ableitung von Distributionen.* Für eine Distribution u und einen Richtungsvektor $\mathbf{e}_k \in \mathbb{R}^d$ wird die Ableitung in Richtung \mathbf{e}_k , $\partial_k u$, durch

$$\partial_k u \in \mathcal{D}', \quad (\partial_k u)(\varphi) := (u(-\partial_k \varphi)). \quad (3.3)$$

definiert. \square

Man rechnet leicht nach, dass tatsächlich $\partial_k u \in \mathcal{D}'$. *Übungsaufgabe, Definition nachrechnen, (3.1) gilt mit c und $m + 1$*

Durch Iteration werden höhere Ableitungen definiert. Für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^d$ gilt

$$D^{\alpha} u(\varphi) = u((-1)^{|\alpha|} D^{\alpha} \varphi).$$

Man erkennt, dass man Distributionen beliebig oft differenzieren kann. Damit sind diese Formen geeignete Kandidaten für einen erweiterten Lösungsbegriff für Differentialgleichungen.

Sind sowohl u als auch $\partial_k u$ reguläre Distributionen, so gilt nach Definition 3.5

$$\langle \partial_k u \rangle(\varphi) = \int_{\Omega} \partial_k u \varphi \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} u \partial_k \varphi \, d\mathbf{x} = \langle u \rangle(-\partial_k \varphi)$$

für alle $\varphi \in \mathcal{D}$. Dann wird $\partial_k u$ auch verallgemeinerte oder schwache Ableitung von u genannt. Analog spricht man von verallgemeinerten oder schwachen Ableitungen höherer Ordnung.

Wie hängt nun der Differentiationsbegriff für Distributionen mit dem gewohnten Ableitungsbegriff zusammen? Wir werden später für reguläre Distributionen nicht mehr zwischen einer Funktion f und der dazugehörigen Distribution $\langle f \rangle$ unterscheiden. Dazu muss sichergestellt werden, dass zumindest für $f \in C^1(\overline{\Omega})$ gilt

$$\langle \partial_k f \rangle = \partial_k f = \partial_k \langle f \rangle.$$

Tatsächlich gilt für $\varphi \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned} \langle \partial_k f \rangle(\varphi) &= \int_{\Omega} \partial_k f \varphi \, d\mathbf{x}, \\ \partial_k \langle f \rangle(\varphi) &= -\langle f \rangle(\partial_k \varphi) = - \int_{\Omega} f \partial_k \varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \partial_k f \varphi \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde der Satz von Gauß angewandt. Die Randintegrale verschwinden, da φ kompakten Träger besitzt. Beide Seiten stimmen also überein und man kann die Funktionen mit den zugehörigen Distributionen identifizieren.

¹Dirac

Beispiel 3.6 *Ableitung der Heaviside²-Funktion.* Die Heaviside-Funktion $H : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist definiert durch

$$H(x) := \begin{cases} 0 & x < 0, \\ 1 & x \geq 0. \end{cases}$$

Es ist $\partial_x H = \delta_0$. Wir schreiben im \mathbb{R}^1 ∂_x anstelle von ∂_1 . In der obigen Formel haben wir bereits Funktion und Distribution identifiziert, denn die Heaviside-Funktion hat im klassischen Sinne keine Ableitung im Punkte $x = 0$. Diese Formel rechnet man mit Hilfe der Definition der Ableitung, der Definition der Heaviside-Funktion, partieller Integration und dem kompakten Träger der Testfunktion nach

$$\partial_x H(\varphi) = - \int_{\mathbb{R}} H(x) \partial_x \varphi(x) dx = - \int_0^{\infty} \partial_x \varphi(x) dx = \varphi(0) = \delta_0(\varphi).$$

□

Beispiel 3.7 *Lösung der Transportgleichung.* Es soll gezeigt werden, dass für $u_0 \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ die Funktion

$$u(x, t) = u_0(x - t)$$

in $Q := \mathbb{R} \times (0, \infty)$ die Transportgleichung

$$\partial_t u + \partial_x u = 0$$

im Sinne der Distributionen löst. Es gilt für $\varphi \in C_0^\infty(Q)$ und die Funktion $\psi(x, t) := \varphi(z + t, t)$

$$\begin{aligned} \langle \partial_t u + \partial_x u, \varphi \rangle &= - \int_Q u (\partial_t \varphi + \partial_x \varphi) dx dt \\ &= - \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}} u_0(x - t) (\partial_t \varphi + \partial_x \varphi)(x, t) dx dt \\ &= - \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}} u_0(z) ((\partial_t \varphi + \partial_x \varphi)(z + t, t)) dz dt \\ &= - \int_0^{\infty} \int_{\mathbb{R}} u_0(z) \partial_t \psi(z, t) dz dt \\ &= - \int_{\mathbb{R}} u_0(z) \left(\int_0^{\infty} \partial_t \psi(z, t) dt \right) dz = 0. \end{aligned}$$

In der Rechnung wurde die Definition von ψ verwendet. Das Integral in der Klammer in der letzten Zeile verschwindet (partielle Integration), da ψ einen kompakten Träger bezüglich der Zeit besitzt. □

Nun werden wir uns mit der Konvergenz von Distributionen beschäftigen.

Definition 3.8 *Konvergenz von Distributionen.* Eine Folge $\{u_j\}$ von Distributionen heißt konvergent gegen eine Distribution $u \in \mathcal{D}'$ falls

$$u_j(\varphi) \rightarrow u(\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}. \tag{3.4}$$

Wir schreiben $u_j \rightarrow u$. □

Beispiel 3.9 Für $\{\mathbf{a}_j\} \in \Omega$ mit $\mathbf{a}_j \rightarrow \mathbf{a} \in \Omega$ gilt $\delta_{\mathbf{a}_j} \rightarrow \delta_{\mathbf{a}}$. □

²Heaviside

Beispiel 3.10 Seien $\{H_{a_j}\}$ um a_j verschobene Heaviside-Funktionen, $a_j \in \mathbb{R}$, und gelte $a_j \rightarrow a$. Dann gilt $H_{a_j} \rightarrow H_a$. Dieses Beispiel zeigt, dass die zugehörige Funktionenfolge nicht punktweise konvergieren muss. Wir haben eine schwache Konvergenz eingeführt, weil die Konvergenz nur für feste Testfunktionen gefordert wird. \square

Beispiel 3.11 Sei $u_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $u_k(x) = \sin(kx)$. Da $u_k \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, gilt $u_k \in \mathcal{D}'$. Mit partieller Integration und dem kompakten Träger der Testfunktion folgt

$$u_k(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \sin(kx)\varphi(x) dx = -\frac{1}{k} \int_{\mathbb{R}} \cos(kx)\varphi'(x) dx.$$

Da das rechte Integral beschränkt ist, folgt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} u_k(\varphi) = 0,$$

das heißt $u_k \rightarrow 0$ in \mathcal{D}' . \square

Die Ableitung ∂_k einer Distribution ist stetig bezüglich der Konvergenz. Das heißt, für Distributionen $u_j \rightarrow u$ gilt $\partial_k u_j \rightarrow \partial_k u$, denn

$$\partial_k u_j(\varphi) = -u_j(\partial_k \varphi) \rightarrow -u(\partial_k \varphi) = \partial_k u(\varphi). \quad (3.5)$$

Nun betrachten wir eine Funktion $\psi \in L^1(\mathbb{R}^d)$ mit $\int_{\mathbb{R}^d} \psi d\mathbf{x} = 1$. Diese Funktion wird mittels eines Parameters $\varepsilon > 0$ gestaucht

$$\psi_\varepsilon(\mathbf{x}) := \frac{1}{\varepsilon^d} \psi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right),$$

siehe Abbildung 3.1 für ein Beispiel. Die Skalierung ist so gewählt, dass das Integral erhalten bleibt

$$\int_{\mathbb{R}^d} \psi_\varepsilon d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{\varepsilon^d} \psi(\mathbf{z}) \varepsilon^d d\mathbf{z} = 1.$$

Die Folge der Funktionen ψ_ε für $\varepsilon \rightarrow 0$ nennt man Dirac-Folge.

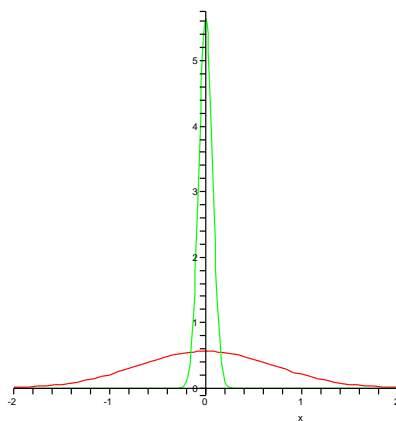


Abbildung 3.1: Die Funktion $\psi = \exp(-(x/\varepsilon)^2)/(\varepsilon\sqrt{\pi})$ für $\varepsilon = 1$ und $\varepsilon = 10$.

Satz 3.12 Für Dirac-Folgen gilt im Sinne der Distributionen

$$\langle \psi_\varepsilon \rangle \rightarrow \delta_0 \quad \text{für } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.6)$$

Beweis: Für $\varphi \in \mathcal{D}$ gilt

$$\langle \psi_\varepsilon \rangle(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi_\varepsilon(\mathbf{x}) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} \psi\left(\frac{\mathbf{x}}{\varepsilon}\right) \frac{\varphi(\mathbf{x})}{\varepsilon^d} \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\mathbf{y}) \varphi(\varepsilon \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}.$$

Wir haben die punktweise Konvergenz $\psi(\mathbf{y})\varphi(\varepsilon \mathbf{y}) \rightarrow \psi(\mathbf{y})\varphi(\mathbf{0})$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ und fast alle $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$. Des Weiteren existiert die Majorante $\psi(\cdot)\varphi(\varepsilon \cdot) \leq M|\psi(\cdot)|$ mit $M := \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} |\varphi|$. Damit konvergieren die Integrale und man erhält

$$\langle \psi_\varepsilon \rangle(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\mathbf{y}) \varphi(\varepsilon \mathbf{y}) \, d\mathbf{y} \rightarrow \varphi(\mathbf{0}) \int_{\mathbb{R}^d} \psi(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = \varphi(\mathbf{0}).$$

Dies war zu zeigen. ■

In Anwendungen hat man oft eine Funktion $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$, die man glätten möchte. Dazu wählt man eine glatte Funktion $\psi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ und ersetzt den Wert von f an der Stelle \mathbf{x} durch

$$f_\varepsilon(\mathbf{x}) := \langle \psi_\varepsilon \rangle(f(\mathbf{x} - \cdot)) = \int_{\mathbb{R}^d} \psi_\varepsilon(\mathbf{y}) f(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}. \quad (3.7)$$

Man ersetzt also $f(\mathbf{x})$ durch gewichtete Mittelwerte. Das Ergebnis ist tatsächlich eine glatte Funktion, wie man durch die Transformationsformel sieht. Man schreibt den Ausdruck als

$$f_\varepsilon(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{z}) \psi_\varepsilon(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \, d\mathbf{z} \quad (3.8)$$

uns sieht, dass f_ε nur über die glatte Funktionen ψ_ε eine \mathbf{x} -Abhängigkeit besitzt, vergleiche auch Regularität von harmonischen Funktionen im Abschnitt 1.2.3. Der Ausdruck (3.8) besitzt wegen seiner Bedeutung einen eigenen Namen. Er wird als Faltung bezeichnet:

$$(f * \psi)(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{z}) \psi(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \, d\mathbf{z}. \quad (3.9)$$

In dieser Vorlesung wird nicht näher auf die Theorie von Faltungen eingegangen. Es wird die Faltung (mit der obigen Symbolik) verwendet werden, falls sie wohldefiniert ist. Dies ist beispielsweise der Fall für $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ und $\psi \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Die Faltung ist aber auch für $f \in \mathcal{D}$ und $\psi \in \mathcal{D}'$ mit Hilfe der Formel (3.7) wohldefiniert.

Kapitel 4

Sobolev–Räume

Zu diesem Abschnitt ist das Buch von Adams [Ada75, AF03] zu empfehlen.

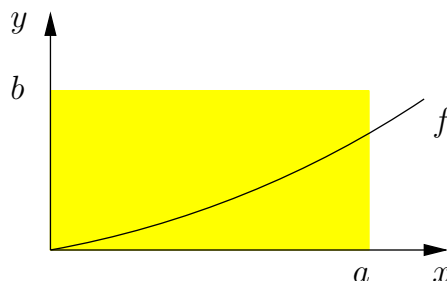
4.1 Elementare Ungleichungen

Viele Ungleichungen der Analysis lassen sich aus einem einfachen geometrischen Argument ableiten.

Lemma 4.1 Sei $f : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige und streng monoton wachsende Funktion mit $f(0) = 0$ und $f(x) \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$. Dann gilt für alle $a, b \in \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$

$$ab \leq \int_0^a f(x) dx + \int_0^b f^{-1}(y) dy.$$

Beweis:



Das Intervall $(0, a)$ wird auf der x -Achse abgetragen und das Intervall $(0, b)$ auf der y -Achse. Dann sind ab der Flächeninhalt des zugehörigen Rechtecks, $\int_0^a f(x) dx$ die Fläche unterhalb der Kurve und $\int_0^b f^{-1}(y) dy$ die Fläche zwischen der positiven y -Achse und der Kurve. Damit ist die Ungleichung bewiesen. Gleichheit tritt genau dann auf, wenn $f(a) = b$ gilt. ■

Die Young¹sche Ungleichung

$$ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2 \quad \forall a, b, \varepsilon \in \mathbb{R}_+$$

erhält man aus diesem Lemma mit $f(x) = \varepsilon x$, $f^{-1}(y) = \varepsilon^{-1}y$. Sie lässt sich auch direkt mit der Binomischen Formel beweisen. Zum Beweis der verallgemeinerten Youngschen Ungleichung

$$ab \leq \frac{\varepsilon^p}{p} a^p + \frac{1}{q\varepsilon^q} b^q, \quad \forall a, b, \varepsilon \in \mathbb{R}_+$$

¹Young

mit $p^{-1} + q^{-1} = 1, p, q \in (1, \infty)$ wählt man $f(x) = x^{p-1}, f^{-1}(y) = y^{1/(p-1)}$ und wendet das obige Lemma auf die Intervalle mit den Grenzen εa und $\varepsilon^{-1}b$ an.

Die Cauchy²-Schwarz³-Ungleichung

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \|\mathbf{x}\|_2 \|\mathbf{y}\|_2 \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$$

ist bereits bekannt. Man kann sie mit Hilfe der Youngschen-Ungleichung beweisen. Dazu stellt man zunächst fest, dass die Cauchy-Schwarz-Ungleichung richtig ist, falls einer der beiden Vektoren verschwindet. Seien \mathbf{x}, \mathbf{y} mit $\|\mathbf{x}\|_2 = \|\mathbf{y}\|_2 = 1$. Man erhält aus der Youngschen Ungleichung

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| = \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |x_i|^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n |y_i|^2 = 1.$$

Damit gilt die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für \mathbf{x}, \mathbf{y} . Sind $\tilde{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0}, \tilde{\mathbf{y}} \neq \mathbf{0}$ beliebig, nutzt man die Homogenität der Cauchy-Schwarz-Ungleichung aus. Aus der Gültigkeit der Cauchy-Schwarz-Ungleichung für \mathbf{x} und \mathbf{y} folgt durch Skalierung

$$\left| \underbrace{(\|\tilde{\mathbf{x}}\|_2^{-1} \tilde{\mathbf{x}}, \|\tilde{\mathbf{y}}\|_2^{-1} \tilde{\mathbf{y}})}_{\mathbf{x} \quad \mathbf{y}} \right| \leq 1$$

Die beiden Vektoren \mathbf{x}, \mathbf{y} haben die Norm 1. Also

$$\frac{1}{\|\tilde{\mathbf{x}}\|_2 \|\tilde{\mathbf{y}}\|_2} |(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}})| \leq 1.$$

Das war zu beweisen.

Die verallgemeinerte Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{1/q}$$

mit $p^{-1} + q^{-1} = 1, p, q \in (1, \infty)$ beweist man auf dem gleichen Wege mit Hilfe der verallgemeinerten Youngschen Ungleichung.

Lemma 4.2 Höldersche Ungleichung. Sei $p^{-1} + q^{-1} = 1, p, q \in (1, \infty)$. Wenn $u \in L^p(\Omega)$ und $v \in L^q(\Omega)$, dann ist $uv \in L^1(\Omega)$ und es gilt

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}.$$

(Für $p = q = 2$ wird dies Cauchy-Schwarz-Ungleichung genannt.)

Beweis: Man muss zunächst zeigen, dass $|uv|$ durch eine integrierbare Funktion abgeschätzt werden kann. Man setzt in der verallgemeinerten Youngschen Ungleichung $\varepsilon = 1, a = |u(\mathbf{x})|$ und $b = |v(\mathbf{x})|$. Dann folgt

$$|u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})| \leq \frac{1}{p} |u(\mathbf{x})|^p + \frac{1}{q} |v(\mathbf{x})|^q.$$

Da die rechte Seite dieser Ungleichung nach Voraussetzung integrierbar ist, ist $uv \in L^1(\Omega)$ gezeigt. Auch die Höldersche Ungleichung ist bereits für den Fall $\|u\|_{L^p(\Omega)} = \|v\|_{L^q(\Omega)} = 1$ durch diese Ungleichung bewiesen

$$\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \leq \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} + \frac{1}{q} \int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^q \, d\mathbf{x} = 1.$$

²Augustin Louis Cauchy (1789 – 1857)

³Schwarz

Die allgemeine Ungleichung folgt nun durch ein Homogenitätsargument wie bei der Cauchy–Schwarz–Ungleichung für den Fall dass beide Funktionen nicht fast überall verschwinden. Im Fall, dass eine Funktion fast überall verschwindet, ist die Ungleichung trivialerweise erfüllt. ■

4.2 Definition und Eigenschaften der Sobolev–Räume $W^{k,p}(\Omega)$

Es werden jetzt neue Banach⁴–Räume von Funktionen eingeführt. Dies sind Räume von k –fach distributionell differenzierbaren Funktionen mit Ableitungen in $L^p(\Omega)$.

Definition 4.3 *Sobolev⁵–Räume.* Für $k \in \mathbb{N}, p \in [1, \infty]$ wird der Sobolev–Raum $W^{k,p}(\Omega)$ wie folgt definiert

$$W^{k,p}(\Omega) := \{u \in L^p(\Omega) : D^\alpha u \in L^p(\Omega) \forall \alpha \text{ mit } |\alpha| \leq k\}.$$

Diese Räume sind ausgestattet mit der Norm

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}. \quad (4.1)$$

□

Damit ist folgendes gemeint. Aus $u \in L^p(\Omega), p \in [1, \infty)$, folgt insbesondere $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. Damit definiert u eine Distribution. Dann existieren auch die Ableitungen $D^\alpha u$ als Distributionen. Mit der Aussage $D^\alpha u \in L^p(\Omega)$ ist gemeint, dass die Distribution $D^\alpha u \in \mathcal{D}'$ durch eine Funktion in $L^p(\Omega)$ dargestellt werden kann.

Elemente in $W^{k,p}(\Omega)$ kann man addieren und mit reellen Zahlen multiplizieren. Das Ergebnis ist wieder eine Funktion in $W^{k,p}(\Omega)$. Damit ist $W^{k,p}(\Omega)$ ein Vektorraum. Man rechnet leicht nach, dass (4.1) tatsächlich eine Norm ist. *Übungsaufgabe*

Es sind $D^\alpha u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})$ für $\alpha = (0, \dots, 0)$ und $W^{0,p}(\Omega) = L^p(\Omega)$.

Nun wird untersucht, ob $W^{k,p}(\Omega)$ vollständig ist. Dazu betrachten wir eine Cauchy–Folge $\{u_j\} \in W^{k,p}(\Omega)$. Aus der Normdefinition (4.1) folgt, dass $\{u_j\}$ eine Cauchy–Folge in $L^p(\Omega)$ ist und da dieser Raum vollständig ist, besitzt sie einen Grenzwert $u \in L^p(\Omega)$. Ebenso sind auch die Folgen aller Ableitungen $\{D^\alpha u_j\}$ Cauchy–Folgen in $L^p(\Omega)$ und besitzen dort Grenzwerte u_α . Wegen der Vertauschbarkeit von Ableitung und Distributionskonvergenz, (3.5), gilt

$$D^\alpha u_j \rightarrow D^\alpha u \text{ in } \mathcal{D}'.$$

Da nach Konstruktion $D^\alpha u_j \rightarrow u_\alpha$, ist die Distributionsableitung $D^\alpha u$ darstellbar durch die $L^p(\Omega)$ –Funktion u_α . Damit ist $u \in W^{k,p}(\Omega)$.

Satz 4.4 Dichtheit von $C^\infty(\Omega)$ in $W^{k,p}(\Omega)$. Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ offen und $f \in W^{k,p}(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$. Dann gelten

- i) Für $\Omega' \subset \Omega$ mit $\text{dist}(\overline{\Omega'}, \partial\Omega) > 0$ und eine Dirac–Folge $\{\psi_j\} \in C_0^\infty(\Omega)$ konvergieren die Funktionen $f_j := f * \psi_j \in C^\infty(\Omega')$

$$\|f - f_j\|_{W^{k,p}(\Omega')} \rightarrow 0.$$

- ii) Für allgemeines Ω gibt es Funktionen $f_j \in C^\infty(\Omega) \cap W^{k,p}(\Omega)$ mit $\|f - f_j\|_{W^{k,p}(\Omega)} \rightarrow 0$.

⁴Banach

⁵Sobolev

Beweis: Siehe Literatur, zum Beispiel [Alt99], Satz 1.21, Satz 2.10, [Ada75], Lemma 3.15. ■

Dieser Satz erlaubt es, die Sobolevräume als Vervollständigung der Funktionen aus $C^\infty(\Omega)$ bezüglich der Norm (4.1) von $W^{k,p}(\Omega)$ zu charakterisieren.

Definition 4.5 Der Sobolev-Raum $W_0^{k,p}(\Omega)$ ist der Abschluss von $C_0^\infty(\Omega)$ in der Norm von $W^{k,p}(\Omega)$

$$W_0^{k,p}(\Omega) = \overline{C_0^\infty(\Omega)}^{\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}}.$$

□

Bemerkung 4.6

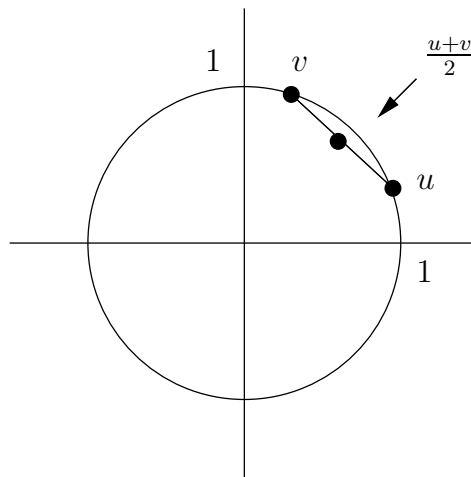
1. Sei Ω ein Gebiet mit hinreichend glattem Rand Γ . Für die dualen Räume der Lebesgue-Räume $L^p(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$ gilt

$$\begin{aligned} (L^p(\Omega))^* &= L^q(\Omega) \text{ mit } p, q \in (1, \infty), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \\ (L^1(\Omega))^* &= L^\infty(\Omega), \\ (L^\infty(\Omega))^* &\neq L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Die Räume $L^1(\Omega)$, $L^\infty(\Omega)$ sind nicht reflexiv.

2. Die Sobolev-Räume sind:

- Banach-Räume (vollständig und normiert),
- separabel (besitzen eine abzählbare Basis),
- uniform konvex für $p \in (1, \infty)$, d.h. für jedes $\varepsilon \in (0, 2]$ gibt es ein $\delta(\varepsilon) > 0$ so, dass falls für $u, v \in X$ mit $\|u\|_X = \|v\|_X = 1$ und $\|u - v\|_X > \varepsilon$ gilt, dass $\|\frac{u+v}{2}\|_X \leq 1 - \delta(\varepsilon)$.



- reflexiv (der duale Raum des dualen Raums kann mit dem ursprünglichen Raum identifiziert werden) für $p \in (1, \infty)$.

3. Der Sobolev-Raum $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ ist ein Hilbert⁶-Raum mit dem Skalarprodukt

$$(u, v)_{H^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^\alpha u(\mathbf{x}) D^\alpha v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

□

⁶David Hilbert

4.3 Die Spur (Verallgemeinerte Randfunktion)

Satz 4.7 Spursatz. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \geq 2$, mit Lipschitz-Rand. Dann besitzen die Funktionen $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \in [1, \infty)$, Randwerte in folgendem Sinne. Es gibt genau einen linearen stetigen Operator $\gamma : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^p(\Gamma)$, der für Funktionen $u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega)$ die klassischen Randwerte liefert

$$g(\mathbf{x}) := \gamma u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \Gamma, \quad \forall u \in C(\overline{\Omega}) \cap W^{1,p}(\Omega).$$

Das heißt $\gamma u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in \Gamma}$.

Da ein linearer und stetiger Operator beschränkt ist, gibt es eine Konstante $C > 0$ mit

$$\|g\|_{L^p(\Gamma)} = \|\gamma u\|_{L^p(\Gamma)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega)$$

oder

$$\|\gamma\|_{\mathcal{L}(W^{1,p}(\Omega), L^p(\Gamma))} \leq C.$$

Der Operator γ wird Spuroperator (trace operator) genannt. Für $u \in C(\overline{\Omega})$ erhält man die klassischen Randwerte. Für alle anderen Funktionen $u \in W^{1,p}(\Omega)$ gibt es eine Folge $\{u_k\} \in C(\overline{\Omega})$ mit $u_k \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\Omega)$, Satz 4.4. Die Spur von u ist definiert als $\gamma u = \lim_{k \rightarrow \infty} (\gamma u_k)$.

Es gelten

$$\begin{aligned} \gamma u(\mathbf{x}) &= 0 \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), \\ \gamma D^\alpha u(\mathbf{x}) &= 0 \quad \forall u \in W_0^{k,p}(\Omega), |\alpha| \leq k-1. \end{aligned}$$

4.4 Sobolev-Räume mit nichtganzzahligem und negativem Exponenten

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet und $p \in (1, \infty)$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Definition 4.8 Der Raum $W^{-k,q}(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 0$, ist wie folgt definiert

$$W^{-k,q}(\Omega) = \{\varphi(\mathbf{x}) \in \mathcal{D}'(\Omega) : \|\varphi\|_{W^{-k,q}} < \infty\}$$

mit

$$\|\varphi\|_{W^{-k,q}} = \sup_{u \in \mathcal{D}(\Omega), u \neq 0} \frac{\langle \varphi, u \rangle}{\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}}.$$

□

Lemma 4.9 Es gilt $W^{-k,q}(\Omega) = \left[W_0^{k,p}(\Omega) \right]^*$, das heißt, $W^{-k,q}(\Omega)$ kann mit dem dualen Raum zum $W_0^{k,p}(\Omega)$ identifiziert werden.

Es gilt

$$\dots \subset W^{2,p}(\Omega) \subset W^{1,p}(\Omega) \subset L^p(\Omega) \subset W^{-1,q}(\Omega) \subset W^{-2,q}(\Omega) \dots$$

Definition 4.10 Sei $s \in \mathbb{R}$. Der Sobolev-Slobodeckij⁷-Raum $H^s(\Omega)$ ist wie folgt definiert:

$$- H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega), \quad s \in \mathbb{Z},$$

⁷Slobodeckij

- $s > 0$ mit $s = k + \sigma$, $\sigma \in (0, 1)$

$$\begin{aligned} \|u\|_{H^s}^2 &= \|u\|_{H^k}^2 + |u|_{k+\sigma}^2 \\ (u, v)_{H^s} &= (u, v)_{H^k} + (u, v)_{k+\sigma}, \quad |u|_{k+\sigma}^2 = (u, u)_{k+\sigma} \\ (u, v)_{k+\sigma} &= \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{(D^{\alpha}u(\mathbf{x}) - D^{\alpha}u(\mathbf{y}))(D^{\alpha}v(\mathbf{x}) - D^{\alpha}v(\mathbf{y}))}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^{d+2\sigma}} dx dy, \end{aligned}$$

- $s < 0$: $H^s(\Omega) = [H_0^{-s}(\Omega)]^*$ mit $H_0^{-s}(\Omega) = \overline{C_0^{\infty}(\Omega)}^{\|\cdot\|_{H^{-s}}}$.

□

4.5 Satz über äquivalente Normierungen

Definition 4.11 Zwei Normen $\|\cdot\|_1$ und $\|\cdot\|_2$ heißen auf dem linearen Raum X äquivalent, wenn Konstanten C_1, C_2 existieren mit

$$C_1 \|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq C_2 \|u\|_1 \quad \forall u \in X.$$

□

Viele wichtige Eigenschaften, wie Stetigkeit und Konvergenz, ändern sich beim Übergang zu einer äquivalenten Norm nicht.

Satz 4.12 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine Gebiet mit $C^{0,1}$ -Rand Γ , $p \in [1, \infty]$, $k = 1, 2, \dots$. Das System $\{f_i\}_{i=1}^l$ sei ein System von Halbnormen, d.h.

- 1) $f_i : W^{k,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$,
- 2) $\exists C_i > 0$ mit $0 \leq f_i(v) \leq C_i \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}$, $\forall v \in W^{k,p}(\Omega)$,
- 3) gilt für $v \in P_{k-1} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k-1} C_{\alpha} x^{\alpha} \right\}$, dass $f_i(v) = 0$, $i = 1, \dots, l$, dann ist $v \equiv 0$.

Dann sind die Norm $\|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)}$ und die Norm

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^* &:= \left(\sum_{i=1}^l f_i^p(u) + |u|_{W^{k,p}(\Omega)}^p \right)^{1/p} \quad \text{mit} \\ |u|_{W^{k,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} |D^{\alpha}u(\mathbf{x})|^p dx \right)^{1/p} \end{aligned}$$

äquivalent.

Bei Halbnormen muss aus $f_i(v) = 0$ nicht $v = 0$ folgen.

Beispiel 4.13 Im $W^{1,p}(\Omega)$ sind die folgenden Normen äquivalent zur Standardnorm:

$$\begin{aligned} \text{a) } \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^* &= \left(\left| \int_{\Omega} u dx \right|^p + |u|_{W^{1,p}(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \\ \text{b) } \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^* &= \left(\left| \int_{\Gamma} u ds \right|^p + |u|_{W^{1,p}(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \\ \text{c) } \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}^* &= \left(\int_{\Gamma} |u|^p ds + |u|_{W^{1,p}(\Omega)}^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

In $W^{k,p}(\Omega)$ ist

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}^* = \left(\sum_{i=0}^{k-1} \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial^i u}{\partial \mathbf{n}^i} \right|^p ds + |u|_{W^{k,p}(\Omega)}^p \right)^{1/p}$$

zur Standardnorm äquivalent. Hierbei ist \mathbf{n} die Außennormale an Γ mit $\|\mathbf{n}\|_2 = 1$.

In $W_0^{k,p}(\Omega)$ wird die Voraussetzung der Glattheit des Randes nicht mehr benötigt. Es gilt

$$\|u\|_{W_0^{k,p}(\Omega)}^* = |u|_{W^{k,p}(\Omega)},$$

das heißt in den Räumen $W_0^{k,p}(\Omega)$ ist die Standardhalbnorm äquivalent zur Standardnorm. Insbesondere gilt für $u \in H_0^1(\Omega)$ ($k = 1, p = 2$)

$$C_1 \|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_2 \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Daraus folgt insbesondere, dass es eine Konstante $C > 0$ gibt mit

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega). \quad (4.2)$$

□

4.6 Einige Ungleichungen in Sobolev-Räumen

Nun soll unter anderem das Ergebnis des letzten Beispiels verallgemeinert werden, indem gezeigt wird, dass man für eine Ungleichung vom Typ (4.2) nicht mehr benötigt, dass die Spur der Funktionen auf dem gesamten Rand verschwindet.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit Rand Γ und $\Gamma_1 \subset \Gamma$ mit $\text{meas}_{\mathbb{R}^{d-1}}(\Gamma_1) = \int_{\Gamma_1} ds > 0$.

Wir betrachten den Raum

$$\begin{aligned} V_0 &= \{v \in W^{1,p}(\Omega) : v|_{\Gamma_1} = 0\} \subset W^{1,p}(\Omega) \text{ falls } \Gamma_1 \subset \Gamma, \\ V_0 &= W_0^{1,p}(\Omega) \text{ falls } \Gamma_1 = \Gamma \end{aligned}$$

mit $p \in [1, \infty)$.

Lemma 4.14 Friedrichs⁸-Ungleichung, Poincaré⁹-Ungleichung, Poincaré-Friedrichs-Ungleichung. Seien $p \in [1, \infty)$ und $\text{meas}_{\mathbb{R}^{d-1}}(\Gamma_1) > 0$. Dann gilt für alle $u \in V_0$

$$\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \leq C_P \int_{\Omega} \|\nabla u(\mathbf{x})\|_2^p d\mathbf{x}.$$

Beweis: Wir zeigen die Ungleichung mit Hilfe des Satzes 4.12 über äquivalente Normierungen. Sei $f_1(u) : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ mit

$$f_1(u) = \left(\int_{\Gamma_1} |u(\mathbf{s})|^p ds \right)^{1/p}.$$

Diese Funktion erfüllt:

- 1) $f_1(u)$ ist eine Halbnorm.
- 2) Es gilt

$$\begin{aligned} 0 &\leq f_1(u) = \left(\int_{\Gamma_1} |u(\mathbf{s})|^p ds \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\Gamma} |u(\mathbf{s})|^p ds \right)^{1/p} \\ &= \|u\|_{L^p(\Gamma)} = \|\gamma u\|_{L^p(\Gamma)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}}. \end{aligned}$$

Die letzte Abschätzung folgt aus der Stetigkeit des Spuoperators.

⁸Friedrichs

⁹Poincaré

3) Sei $v \in P_0$, d.h. eine Konstante. Dann folgt aus

$$0 = f_1(v) = \left(\int_{\Gamma_1} |v(\mathbf{s})|^p ds \right)^{1/p} = |v| (\text{meas}_{\mathbb{R}^{d-1}}(\Gamma_1))^{1/p},$$

dass $|v| = 0$ ist.

Damit sind die Voraussetzungen des Satzes über äquivalente Normierungen erfüllt. Es gibt also zwei Konstanten C_1, C_2 mit

$$C_1 \underbrace{\left(\int_{\Gamma_1} |u(\mathbf{s})|^p ds + \int_{\Omega} \|\nabla u(\mathbf{x})\|_2^p d\mathbf{x} \right)^{1/p}}_{\|u\|_{W^{1,p}}^*} \leq \|u\|_{W^{1,p}} \leq C_2 \|u\|_{W^{1,p}}^* \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

Insbesondere gilt

$$\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \|\nabla u(\mathbf{x})\|_2^p d\mathbf{x} \leq C_2^p \left(\int_{\Gamma_1} |u(\mathbf{s})|^p ds + \int_{\Omega} \|\nabla u(\mathbf{x})\|_2^p d\mathbf{x} \right)$$

oder

$$\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \leq C_P \left(\int_{\Gamma_1} |u(\mathbf{s})|^p ds + \int_{\Omega} \|\nabla u(\mathbf{x})\|_2^p d\mathbf{x} \right)$$

mit $C_P = C_2^p$. Da $u \in V_0$ auf Γ_1 verschwindet, folgt die Behauptung des Lemmas. \blacksquare

Auf V_0 wird damit $|\cdot|_{W^{1,p}}$ zu einer zu $\|\cdot\|_{W^{1,p}}$ äquivalenten Norm. Die klassische Friedrichs- oder Poincaré-Ungleichung ist für $\Gamma_1 = \Gamma$ und für $p = 2$ gegeben:

$$\|u\|_{L^2} \leq C_P \|\nabla u\|_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega),$$

wobei die Konstante nur vom Durchmesser des Gebiets Ω abhängt.

Lemma 4.15 Sei $\Omega' \subset \Omega$ mit $\text{meas}_{\mathbb{R}^d}(\Omega') = \int_{\Omega'} d\mathbf{x} > 0$. Dann gilt für alle $u \in W^{1,p}(\Omega)$ die Ungleichung

$$\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \leq C \left(\left| \int_{\Omega'} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right|^p + \int_{\Omega} \|\nabla u(\mathbf{x})\|_2^p d\mathbf{x} \right).$$

Beweis: Es wird wiederum der Satz 4.12 über äquivalente Normierungen genutzt, diesmal mit

$$f_1 : W^{1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}_+ \cup \{0\}, \quad f_1(u) = \left| \int_{\Omega'} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right|.$$

Es gilt:

- 1) $f_1(u)$ ist eine Halbnorm.
- 2) Mit der Hölderschen Ungleichung folgt

$$\begin{aligned} 0 &\leq f_1(u) = \left| \int_{\Omega'} u(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right| \leq (\text{meas}_{\mathbb{R}^d}(\Omega'))^{1/q} \left(\int_{\Omega'} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p} \\ &\leq (\text{meas}_{\mathbb{R}^d}(\Omega'))^{1/q} \left(\int_{\Omega} |u(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} \right)^{1/p} \leq (\text{meas}_{\mathbb{R}^d}(\Omega'))^{1/q} \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

- 3) Sei $v \in P_0$, d.h. eine Konstante. Dann folgt aus

$$0 = f_1(v) = \left| v \int_{\Omega'} d\mathbf{x} \right| = |v| \text{meas}_{\mathbb{R}^d}(\Omega') \implies |v| = 0 \implies v(\mathbf{x}) \equiv 0.$$

Damit ist das Lemma bewiesen. \blacksquare

4.7 Der Gaußsche Satz

In diesem Abschnitt wird untersucht, inwieweit der Gaußsche Satz auch für Funktionen aus Sobolev-Räumen gilt.

Satz 4.16 Satz von Gauß. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d, d \geq 2$, ein Gebiet mit einem $C^{0,1}$ -Rand Γ . Dann gilt die sogenannte Bilanzidentität

$$\int_{\Omega} \partial_i u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} u(\mathbf{s}) \mathbf{n}_i(\mathbf{s}) \, ds,$$

\mathbf{n} – Einheitsaußennormale an Γ , für alle $u \in W^{1,1}(\Omega)$.

Beweis: Die Behauptung wurde für Funktionen aus $C^1(\overline{\Omega})$ im Satz 2.8 bewiesen. Der Raum $C^1(\overline{\Omega})$ liegt dicht in $W^{1,1}(\Omega)$, Satz 4.4, das heißt, für alle $u \in W^{1,1}(\Omega)$ gibt es eine Folge $\{u_m\}_{m=1}^{\infty} \in C^1(\overline{\Omega})$ mit

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u - u_m\|_{W^{1,1}} = 0,$$

insbesondere

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \partial_i u_m(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \partial_i u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Aus der Stetigkeit des Spuoperators erhalten wir

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|u - u_m\|_{L^1(\Gamma)} \leq C \lim_{m \rightarrow \infty} \|u - u_m\|_{W^{1,1}} = 0,$$

woraus folgt

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} u_m(\mathbf{s}) \, ds = \int_{\Gamma} u(\mathbf{s}) \, ds$$

und da die Normale \mathbf{n} bei einem $C^{0,1}$ -Gebiet fast überall stetig ist

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} u_m(\mathbf{s}) \mathbf{n}_i(\mathbf{s}) \, ds = \int_{\Gamma} u(\mathbf{s}) \mathbf{n}_i(\mathbf{s}) \, ds.$$

Das beweist die Behauptung. ■

Durch Addition erhält man

Folgerung 4.17 Sei $\mathbf{u}(\mathbf{x}) \in (W^{1,1}(\Omega))^d$ ein Vektorfeld. Dann gilt die Bilanzidentität

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \mathbf{u}(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{s}) \, ds.$$

Folgerung 4.18 Partielle Integration. Seien $u \in W^{1,p}(\Omega)$ und $v \in W^{1,q}(\Omega)$ mit $p \in (1, \infty), \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} \partial_i u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} u(\mathbf{s}) v(\mathbf{s}) \mathbf{n}_i(\mathbf{s}) \, ds - \int_{\Omega} u(\mathbf{x}) \partial_i v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Beweis: Übungsaufgabe. ■

Folgerung 4.19 Erste Green¹⁰sche Formel. Es gilt

$$\int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{s}) v(\mathbf{s}) \, ds - \int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

für alle $u \in H^2(\Omega), v \in H^1(\Omega)$.

¹⁰Green

Beweis: Nach Hölderscher Ungleichung ist

$$\partial_i uv \in W^{1,1}(\Omega).$$

Nun geht es im Prinzip weiter wie im Beweis der vorangegangenen Folgerung, wobei man noch aufsummieren muss. ■

Die erste Greensche Formel ist die Formel der einmaligen partiellen Integration. Das Randintegral kann man äquivalent in der Form

$$\int_{\Gamma} \nabla u(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{s}) v(\mathbf{s}) \, ds$$

schreiben. Die Formel der zweimaligen partiellen Integration nennt man zweite Greensche Formel.

Folgerung 4.20 Zweite Greensche Formel. *Es gilt*

$$\int_{\Omega} \Delta u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x}) - \Delta v(\mathbf{x}) u(\mathbf{x}) \, dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{s}) v(\mathbf{s}) - \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{s}) u(\mathbf{s}) \, ds$$

für alle $u, v \in H^2(\Omega)$.

4.8 Einbettungssätze und Sobolev-Ungleichungen

Das erste Lemma gibt Auskunft über Sobolev-Räume mit gleicher Integrationspotenz p aber unterschiedlichem Grad der Ableitung.

Lemma 4.21 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet, $p \in [1, \infty)$, $k \leq m$, dann gilt $W^{m,p}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$.*

Beweis: Folgt unmittelbar aus der Definition der Räume. ■

Beim nächsten Lemma ist der Grad der Ableitung gleich, aber die Integrationspotenz ist unterschiedlich.

Lemma 4.22 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein beschränktes Gebiet, $k \geq 0$ und $p, q \in [1, \infty]$ mit $q > p$. Dann gilt $W^{k,q}(\Omega) \subset W^{k,p}(\Omega)$.*

Beweis: Übungsaufgabe. ■

Das nächste Lemma ist über Sobolev-Räume mit gleicher Integrationspotenz und gleichem Ableitungsordnung, aber auf ineinandergeschachtelten Gebieten.

Lemma 4.23 *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit einem $C^{0,1}$ -Rand Γ , $k \geq 0$ und $p \in [1, \infty]$. Dann existiert eine Abbildung $E : W^{k,p}(\Omega) \rightarrow W^{k,p}(\mathbb{R}^d)$ mit*

- a) $E v|_{\Omega} = v$,
- b) $\|E v\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)} \leq \|v\|_{W^{k,p}(\Omega)}$.

Die natürliche Einschränkung $e : W^{k,p}(\mathbb{R}^d) \rightarrow W^{k,p}(\Omega)$ ist also möglich und es gilt $\|e v\|_{W^{k,p}(\Omega)} \leq \|e v\|_{W^{k,p}(\mathbb{R}^d)}$.

Satz 4.24 Sobolev-Ungleichung. *Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ein Gebiet mit einem $C^{0,1}$ -Rand Γ , $k \geq 0$ und $p \in [1, \infty)$ mit*

$$\begin{aligned} k &\geq d && \text{für } p = 1, \\ k &> d/p && \text{für } p > 1. \end{aligned}$$

Dann existiert eine Konstante C so, dass für alle $u \in W^{k,p}(\Omega)$ gilt

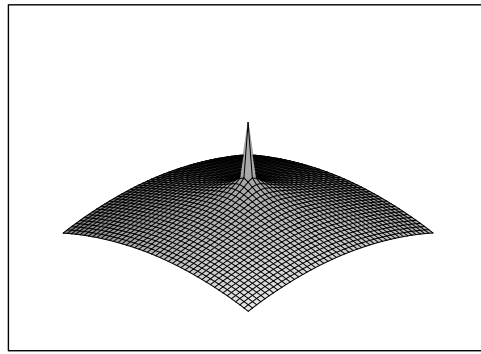
$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{k,p}(\Omega)}.$$

In der $L^\infty(\Omega)$ -Äquivalenzklasse von u ist sogar eine stetige Funktion enthalten.

Der Satz besagt, dass jede Funktion mit genügend vielen schwachen Ableitungen (die Anzahl hängt von der Dimension von Ω und der Integrierbarkeit der Potenzen der schwachen Ableitungen ab) als stetige, beschränkte Funktion betrachtet werden kann. Man sagt, $W^{k,p}(\Omega)$ ist in $C(\Omega)$ eingebettet. Wendet man den Satz auf Ableitungen von Funktion an, erhält man beispielsweise die Einbettung $W^{k,p}(\Omega) \rightarrow C^s(\Omega)$ für $(k-s)p > d, p > 1$. Weitere Einbettungen findet man in [Ada75].

Beispiel 4.25 Sei $d = 1$ und Ω ein beschränktes Intervall. Dann ist jede Funktion des $H^1(\Omega)$ ($k = 1, p = 2$) bereits stetig in Ω . \square

Beispiel 4.26 Für $d \geq 2$ sind die Funktionen aus $H^1(\Omega)$ im allgemeinen nicht mehr stetig. Dazu wird ein Beispiel konstruiert.



Seien $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x}\|_2 < 1/2\}$ und $f(\mathbf{x}) = \ln |\ln \|\mathbf{x}\|_2|$. Für $\|\mathbf{x}\|_2 < 1/2$ ist $|\ln \|\mathbf{x}\|_2| = -\ln \|\mathbf{x}\|_2$ und es folgt für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

$$\partial_i f = -\frac{1}{\ln \|\mathbf{x}\|_2} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2} \frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|_2} = -\frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|_2^2 \ln \|\mathbf{x}\|_2}.$$

Für $p \leq d$ erhalten wir

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right|^p = \underbrace{\left| \frac{x_i}{\|\mathbf{x}\|_2} \right|^p}_{\leq 1} \underbrace{\left| \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2 \ln \|\mathbf{x}\|_2} \right|^p}_{\geq e} \leq \left| \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2 \ln \|\mathbf{x}\|_2} \right|^d,$$

da $d \geq p = 2$ (die Abschätzung des zweiten Faktors erhält man beispielsweise mit einer Kurvendiskussion). Damit folgt (Übergang in sphärische Koordinaten, $\rho = e^{-t}$)

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\partial_i f|^p d\mathbf{x} &\leq \int_{\Omega} \frac{d\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2^d |\ln \|\mathbf{x}\|_2|^d} = \int_{S^{d-1}} \int_0^{1/2} \frac{\rho^{d-1}}{\rho^d |\ln \rho|^d} d\rho d\omega \\ &= \text{meas}(S^{d-1}) \int_0^{1/2} \frac{d\rho}{\rho |\ln \rho|^d} = -\text{meas}(S^{d-1}) \int_{\infty}^{\ln 2} \frac{dt}{t^d} < \infty \end{aligned}$$

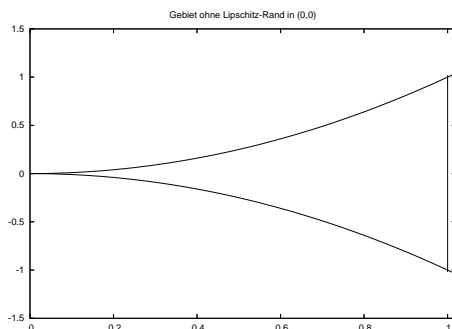
weil $d \geq 2$.

Es gilt damit $\partial_i f \in L^p(\Omega)$ mit $p \leq d$. Analog beweist man $f \in L^p(\Omega)$ mit $p \leq d$. Also gilt $f \in W^{1,p}(\Omega)$ mit $p \leq d$. Es gilt jedoch $f \notin L^\infty(\Omega)$. Dieses Beispiel zeigt, dass die Bedingung $k > d/p$ für $p > 1$ scharf ist.

Insbesondere haben wir für $p = 2$ dass aus $f \in H^1(\Omega)$ im allgemeinen nicht $f \in C(\Omega)$ folgt. \square

Beispiel 4.27 Auch die Bedingung, dass Ω einen Lipschitz-Rand Γ besitzt ist wichtig.

Betrachte dazu $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1, |y| < x^r, r > 1\}$, siehe Abbildung für $r = 2$.



Für $u(x, y) = x^{-\varepsilon/p}$, $0 < \varepsilon < r$ gilt

$$\partial_x u = x^{-\varepsilon/p-1} \left(-\frac{\varepsilon}{p} \right) = C(\varepsilon, p) x^{-\varepsilon/p-1}, \quad \partial_y u = 0.$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=1} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u|^p \, dx dy &= C(\varepsilon, p) \int_{\Omega} x^{-\varepsilon-p} \, dx dy \\ &= C(\varepsilon, p) \int_0^1 x^{-\varepsilon-p} \left(\int_{-x^r}^{x^r} dy \right) dx \\ &= \tilde{C}(\varepsilon, p) \int_0^1 x^{-\varepsilon-p+r} \, dx. \end{aligned}$$

Dieser Wert ist endlich für $-\varepsilon - p + r > -1$ bzw. für $p < 1 + r - \varepsilon$. Wählt man $r \geq \varepsilon > 0$, so ist $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Für $\varepsilon > 0$ ist u aber in Ω unbeschränkt, also $u \notin L^{\infty}(\Omega)$.

Die unbeschränkten Funktionswerte werden beim Integrieren dadurch kompensiert, dass das Gebiet in der Umgebung der singulären Stelle $(0, 0)$ ein sehr kleines Maß besitzt. \square

Für $\Omega = \mathbb{R}^d$ gilt die Sobolev-Ungleichung nicht.

Kapitel 5

Energiemethoden für elliptische Differentialgleichungen

Wir werden im weiteren vor allem partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung betrachten.

5.1 Typeneinteilung bei partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

Eine quasilineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung hat die Gestalt

$$\sum_{j,k=1}^d a_{jk}(\mathbf{x}) \partial_j \partial_k u + F(\mathbf{x}, u, \partial_1 u, \dots, \partial_d u) = 0 \quad (5.1)$$

oder in Nabla-Notation

$$\nabla A(\mathbf{x}) \nabla u + \tilde{F}(\mathbf{x}, u, \partial_1 u, \dots, \partial_d u) = 0.$$

Eine lineare partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung hat die Form

$$\sum_{j,k=1}^d a_{jk}(\mathbf{x}) \partial_j \partial_k u + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u + c(\mathbf{x})u = F(\mathbf{x}).$$

Nach dem Satz von Schwarz gilt $\partial_j \partial_k u = \partial_k \partial_j u$ falls u hinreichend regulär ist. Daraus folgt, dass die Gleichung (5.1) in Wirklichkeit für $\partial_j \partial_k u$ zwei Koeffizienten enthält, nämlich $a_{jk}(\mathbf{x})$ und $a_{kj}(\mathbf{x})$. Zur Eindeutigkeit legt man fest

$$a_{jk}(\mathbf{x}) = a_{kj}(\mathbf{x}).$$

Der Typ der partiellen Differentialgleichung wird durch die Koeffizientenfunktionen der zweiten Ableitungen bestimmt, die man in Matrixform schreiben kann

$$A(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_{11}(\mathbf{x}) & \cdots & a_{1d}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1}(\mathbf{x}) & \cdots & a_{dd}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Die Matrix $A(\mathbf{x})$ ist auf Grund der obigen Festlegung symmetrisch. Damit sind alle ihre Eigenwerte reell.

Definition 5.1 Auf der Teilmenge $\tilde{\Omega}$ von Ω seien α Eigenwerte von $A(\mathbf{x})$ positiv, β negativ und γ gleich Null. Die *quasilineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung* nennt man auf der Menge $\tilde{\Omega}$ vom Typ (α, β, γ) . Sie heißt

- *elliptisch* auf $\tilde{\Omega}$, wenn sie vom Typ $(d, 0, 0) = (0, d, 0)$ ist,
- *hyperbolisch* auf $\tilde{\Omega}$, wenn sie vom Typ $(d - 1, 1, 0) = (1, d - 1, 0)$ ist,
- *parabolisch* auf $\tilde{\Omega}$, wenn sie vom Typ $(d - 1, 0, 1) = (0, d - 1, 1)$ ist.

Bei linearen partiellen Differentialgleichungen sprechen wir von einer *parabolischen Gleichung*, wenn neben der obigen Bedingung noch zusätzlich

$$\text{Rang}(A(\mathbf{x}), \mathbf{b}(\mathbf{x})) = d$$

in $\tilde{\Omega}$ gilt. □

Mit dieser Definition sind nicht alle Fälle abgedeckt. Die anderen Fälle sind jedoch wenig interessant.

Beispiel 5.2 1. Bei der Poisson-Gleichung sind $a_{ii} = -1 < 0$ und $a_{ij} = 0$ für $i \neq j$. Somit sind alle Eigenwerte von A negativ und die Poisson-Gleichung ist eine elliptische Differentialgleichung. Das gleiche gilt auch für die stationäre Wärmeleitungsgleichung (1.5).

2. Bei der Wärmeleitungsgleichung (1.7) hat man neben den partiellen Ableitungen im Ort auch noch die in der Zeit. Die zeitliche Ableitung muss man bei der Matrix A auch berücksichtigen. Da diese Ableitung nur von erster Ordnung ist, hinterlässt sie in A eine Nullzeile/-spalte. Man hat also, zum Beispiel für die Wärmeleitungsgleichung, $a_{ii} = -1 < 0, i = 2, \dots, d + 1$, $a_{11} = 0, a_{ij} = 0$ für $i \neq j$. Ein Eigenwert ist somit Null und die anderen besitzen dasselbe Vorzeichen. Der Vektor im Term erster Ordnung hat die Form $\mathbf{b} = (1, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{R}^{d+1}$, wobei die Eins von $\partial_t u$ kommt. Man sieht sofort, dass (A, \mathbf{b}) vollen Spaltenrang besitzt. Damit ist (1.7) parabolische partielle Differentialgleichung, siehe Abschnitt 8.

3. Ein Beispiel für eine hyperbolische PDE ist die Wellengleichung

$$\partial_t^2 u - \varepsilon^2 \Delta u = f \quad \text{in } \Omega \times (0, T),$$

siehe Abschnitt 1.3.4. □

5.2 Variationsmethode und symmetrische Probleme

5.2.1 Existenz einer Lösung im Sinne der Distributionen

In diesem Abschnitt betrachten wir die Poisson-Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned} \tag{5.2}$$

Zum Beweis der Existenz von Lösungen soll das Dirichlet-Prinzip aus Satz 1.7 genutzt werden. Die Eindeutigkeit einer Lösung wurde ja bereits im Satz 1.8 bewiesen.

Wir definieren das Energiefunktional

$$E : V_g \rightarrow \mathbb{R}, \quad u \mapsto \int_{\Omega} \frac{1}{2} \|\nabla u\|_2^2 - fu \, dx,$$

wobei $V_g := \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\partial\Omega} = g\}$ (im Sinne der Spur). Angenommen, $u \in V_g$ sei Minimierer dieser Energie. Als Vergleichsfunktion betrachten wir $u_\varepsilon := u + \varepsilon\varphi$ mit $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. Diese Funktion erfüllt ebenfalls die Randbedingung, also $u_\varepsilon \in V_g$. Da die Energie in u ein Minimum annimmt, gilt

$$0 = \frac{d}{d\varepsilon} E(u + \varepsilon\varphi)|_{\varepsilon=0} = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi - f\varphi \, d\mathbf{x}.$$

Insbesondere gilt diese Gleichung für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, also gilt $-\Delta u = f$ im distributionellen Sinne. Die Randbedingung ist wegen $u \in V_g$ ebenfalls erfüllt. Es bleibt zu zeigen, dass ein Minimum u von E existiert.

Satz 5.3 Existenz einer Lösung von (5.2). *Seien Ω beschränkt mit Lipschitz-stetigem Rand, $f \in L^2(\Omega)$ und die Randwerte g gegeben als Spur einer Funktion $g \in H^1(\Omega)$. Dann existiert ein Minimierer u der Energie E in V_g . Der Minimierer u löst die Poisson-Gleichung (5.2) im distributionellen Sinne und die Randbedingungen sind im Sinne der Spur erfüllt.*

Beweis: Zunächst wird gezeigt, dass die Energie nach unten beschränkt ist, das heißt

$$\inf_{u \in V_g} E(u) > -\infty. \quad (5.3)$$

Das bedeutet, dass der positive erste Term die Energie dominiert.

Sei $u \in V_g$, $u = g + v$ mit der im Satz fest gewählten Funktion $g \in V_g$ und mit $v \in H_0^1(\Omega)$. Dann folgt mit Cauchy-Schwarz-Ungleichung, Dreiecksungleichung, Poincaré-Ungleichung und noch einmal die Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} f u \, d\mathbf{x} \right| &\leq \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \leq \|f\|_{L^2} (\|g\|_{L^2} + \|v\|_{L^2}) \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} + C_P \|f\|_{L^2} \|\nabla v\|_{L^2} \\ &\leq \|f\|_{L^2} \|g\|_{L^2} + C_P \|f\|_{L^2} \|\nabla g\|_{L^2} + C_P \|f\|_{L^2} \|\nabla u\|_{L^2} \\ &= C_1(f, g) + C_2(f) \|\nabla u\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Damit gilt für die Energie

$$\begin{aligned} E(u) &\geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - \left| \int_{\Omega} f u \, d\mathbf{x} \right| \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - C_1 - C_2 \|\nabla u\|_{L^2} \\ &\geq \frac{1}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - C - \frac{1}{4} \|\nabla u\|_{L^2}^2 = \frac{1}{4} \|\nabla u\|_{L^2}^2 - C. \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Ungleichung

$$ab \leq \varepsilon^2 a^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} b^2$$

mit $a = C_2$, $b = \|\nabla u\|_{L^2}$, $\varepsilon = 1/2$ verwendet. Das Quadrat in der letzten Zeile der Abschätzung für die Energie ist positiv und damit folgt (5.3). Die Energie von u kontrolliert das Quadrat der $H^1(\Omega)$ -Norm von u (von oben).

Wir betrachten nun eine Minimalfolge $\{u_k\} \in V_g$, das heißt $E(u_k) \rightarrow \inf E(u)$. Falls der Raum V_g nicht leer ist, existiert solch eine Folge nach Definition des Infimums. Wir haben $g \in V_g$, also ist V_g nicht leer.

Als Lösung u von (5.2) kommt ein Limes der Folge $\{u_k\}$ in Frage. Es muss allerdings geklärt werden, in welcher Form ein solcher Limes existiert, das heißt, in

welchem Funktionenraum. Dazu betrachten wir das Energiefunktional im gesamten Raum $H^1(\Omega)$. Es gilt (Parallelogrammgleichung)

$$\begin{aligned}
\|\nabla(u_k - u_m)\|_{L^2}^2 &= -\|\nabla(u_k + u_m)\|_{L^2}^2 + 2\|\nabla u_k\|_{L^2}^2 + 2\|\nabla u_m\|_{L^2}^2 \\
&= -2E(u_k + u_m) - 2\int_{\Omega} (u_k + u_m)f \, d\mathbf{x} + 4E(u_k) \\
&\quad + 4\int_{\Omega} u_k f \, d\mathbf{x} + 4E(u_m) + 4\int_{\Omega} u_m f \, d\mathbf{x} \\
&= -8E\left(\frac{u_k + u_m}{2}\right) + 4E(u_k) + 4E(u_m) \\
&\leq -8\inf_{v \in V_g} E(v) + 4E(u_k) + 4E(u_m).
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass nach dem Spursatz die Funktion $(u_k + u_m)/2 \in V_g$. Nach Voraussetzung konvergieren $E(u_k)$ und $E(u_m)$ gegen $\inf_{v \in V_g} E(v)$. Damit konvergiert die rechte Seite gegen Null und es folgt, mit Hilfe der Poincaré–Ungleichung

$$\|u_k - u_m\|_{H^1}^2 \leq C_P \|\nabla(u_k - u_m)\|_{L^2} \rightarrow 0,$$

da $u_k - u_m \in H_0^1(\Omega)$. Die Minimalfolge $\{u_k\}$ ist also eine Cauchy–Folge in $H^1(\Omega)$. Wegen der Vollständigkeit von $H^1(\Omega)$ besitzt sie einen Grenzwert $u \in H^1(\Omega)$. Da alle Elemente der Minimalfolge die Randbedingung g besitzen, liefert der Spursatz (Stetigkeit von γ), dass auch das Grenzelement diese Randbedingung erfüllt, also $u \in V_g$. Aus der Konvergenz in $H^1(\Omega)$ folgt die Konvergenz der Energie, also $E(u) = \inf_{v \in V_g} E(v)$.

Dass Minimierer von E die Poisson–Gleichung (5.2) lösen, wurde bereits zu Beginn dieses Abschnitts gezeigt. ■

5.2.2 Existenz einer Lösung im Sinne des Hilbert–Raumes, Darstellungssatz von Riesz

Sei V ein Hilbert–Raum mit dem Skalarprodukt $a(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ und der Norm $\|v\|_V = a(v, v)^{1/2}$.

Satz 5.4 Riesz¹scher Darstellungssatz. *Zu jedem stetigen linearen Funktional $f \in V'$ gibt es ein eindeutig bestimmtes $u \in V$ mit*

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V.$$

Des weiteren ist u die eindeutig bestimmte Lösung des Variationsproblems

$$\min_{v \in V} F(v) := \min_{v \in V} \left(\frac{1}{2}a(v, v) - f(v) \right)$$

Beweis: Der Beweis ähnelt demjenigen von Satz 5.3. Es werden aber nur allgemeine Eigenschaften von Hilbert–Räumen verwendet und kein konkreter Raum betrachtet.

Als erstes wird die Existenz einer Lösung u des Variationsproblems gezeigt. Wegen der Stetigkeit von f gilt die Abschätzung

$$|f(v)| \leq c\|v\|_V \quad \forall v \in V$$

und daher

$$F(v) \geq \frac{1}{2}\|v\|_V^2 - c\|v\|_V \geq -\frac{1}{2}c^2.$$

¹Riesz

Im letzten Schritt wendet man einfach das notwendige Kriterium für ein Minimum des mittleren Ausdrucks an. Damit ist das Funktional F nach unten beschränkt und

$$d = \inf_{v \in V} F(v)$$

existiert. Sei $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Minimalfolge, d.h. $F(v_k) \rightarrow d$ für $k \rightarrow \infty$. Im Hilbert-Raum gilt die Parallelogrammgleichung, aus welcher man

$$\|v_k - v_l\|_V^2 + \|v_k + v_l\|_V^2 = 2\|v_k\|_V^2 + 2\|v_l\|_V^2$$

erhält. Es folgt, unter Nutzung der Linearität von f ,

$$\begin{aligned} & \|v_k - v_l\|_V^2 \\ &= 2\|v_k\|_V^2 + 2\|v_l\|_V^2 - 4\left\|\frac{v_k + v_l}{2}\right\|_V^2 - 4f(v_k) - 4f(v_l) + 8f\left(\frac{v_k + v_l}{2}\right) \\ &= 4F(v_k) + 4F(v_l) - 8F\left(\frac{v_k + v_l}{2}\right) \\ &\leq 4F(v_k) + 4F(v_l) - 8d \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für $k, l \rightarrow \infty$. Damit ist $\{v_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge, die wegen der Vollständigkeit von V einen Grenzwert $u \in V$ besitzt. Da F stetig ist, ist $F(u) = d$ und u ist die Lösung des Variationsproblems.

Im nächsten Schritt wird gezeigt, dass jede Lösung des Variationsproblems auch eine Lösung der Gleichung ist. Es ist, unter Nutzung der Bilinearität und Symmetrie,

$$\begin{aligned} \Phi(\varepsilon) &= F(u + \varepsilon v) = \frac{1}{2}a(u + \varepsilon v, u + \varepsilon v) - f(u + \varepsilon v) \\ &= \frac{1}{2}a(u, u) + \varepsilon a(u, v) + \frac{\varepsilon^2}{2}a(v, v) - f(u) - \varepsilon f(v) \end{aligned}$$

für alle $v \in V$. Wenn u das Variationsproblem minimiert, dann besitzt die Funktion $\Phi(\varepsilon)$ an der Stelle $\varepsilon = 0$ ein Minimum. Das notwendige Kriterium führt auf die Bedingung

$$0 = \Phi'(0) = a(u, v) - f(v) \quad \text{für alle } v \in V.$$

Zum Schluss wird die Eindeutigkeit der Lösung gezeigt. Seien u_1 und u_2 zwei Lösungen der Gleichung. Aus der Differenz der beiden Gleichungen erhält man

$$a(u_1 - u_2, v) = 0 \quad \text{für alle } v \in V.$$

Diese Beziehung gilt speziell für $v = u_1 - u_2$ woraus $u_1 = u_2$ folgt. Die Lösung des Variationsproblems ist eindeutig auf Grund der Eindeutigkeit der Lösung der Gleichung. \blacksquare

Wir betrachten zunächst die Poisson-Gleichung mit homogenen Dirichlet-Randwerten

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned} \tag{5.4}$$

und $f \in H^{-1}(\Omega)$.

Definition 5.5 *Schwache Lösung.* Eine Funktion $u \in V = H_0^1(\Omega)$ wird schwache Lösung von (5.4) genannt, falls gilt

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V \tag{5.5}$$

mit

$$a(u, v) = (\nabla u, \nabla v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx.$$

Die Gleichung (5.5) wird schwache Formulierung von (5.4) genannt. \square

Wegen der Poincaré-Ungleichung gibt es eine Konstante c mit

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega).$$

Es folgt für $v \in H_0^1(\Omega) \subset H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^1(\Omega)} &= \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \leq \left(c \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq C \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}. \end{aligned}$$

Damit ist $a(\cdot, \cdot)$ ein Skalarprodukt auf $H_0^1(\Omega)$ mit der induzierten Norm

$$\|v\|_{H_0^1(\Omega)} := a(v, v)^{1/2},$$

die zu $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$ äquivalent ist.

Nach Definition ist $H^{-1}(\Omega)$ der Raum der stetigen linearen Funktionale über $H_0^1(\Omega)$. Damit folgt aus dem Riesz'schen Darstellungssatz, dass die schwache Lösung von (5.4) existiert und eindeutig ist. Des weiteren löst u das Variationsproblem

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega)} F(v) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{2} \|\nabla v\|_2^2 - f v \, dx \right).$$

Ein Vorteil der Verallgemeinerung auf rechte Seiten $f \in H^{-1}(\Omega)$ besteht darin, dass man Randwerte g in die rechte Seite stecken kann. Man schreibt $u = g + v$ und sucht eine Funktion $v \in V = H_0^1(\Omega)$ mit

$$-\Delta v = -\Delta u + \Delta g = f + \Delta g$$

im Distributionssinne. Dies gelingt, denn für $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ gilt

$$\langle \Delta g, \varphi \rangle = \int_{\Omega} g \Delta \varphi \, dx = - \int_{\Omega} \nabla g \cdot \nabla \varphi \, dx,$$

da das Randintegral wegen $\nabla \varphi \cdot \mathbf{n} = 0$ entfällt. Es folgt

$$|\langle \Delta g, \varphi \rangle| \leq \|\nabla g\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|\varphi\|_{H^1(\Omega)}.$$

Da $\mathcal{D}(\Omega)$ dicht in $H_0^1(\Omega)$ ist, siehe Definition 4.5, ist $\langle \Delta g, \varphi \rangle$ für alle $\varphi \in H_0^1(\Omega)$ beschränkt. Linearität ist klar und verbunden mit der Beschränktheit folgt damit die Stetigkeit. Somit definiert Δg ein Element in $H^{-1}(\Omega)$.

Anwendung des Riesz'schen Satzes auf v ergibt die Folgerung:

Folgerung 5.6 Sei Ω beschränkt mit Lipschitz-Rand $\partial\Omega$, $f \in H^{-1}(\Omega)$ und $g \in H^1(\Omega)$. Dann existiert eine eindeutige Lösung von $u \in H^1(\Omega)$ von

$$\begin{aligned} a(u, v) &= f(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega), \\ u &= g \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

5.3 Bilinearformen und Darstellungssatz von Lax–Milgram

Nun wird eine Verallgemeinerung des Riesz'schen Darstellungssatzes, Satz 5.4, auf unsymmetrische Bilinearformen betrachtet. Sei $b(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine Bilinearform, die beschränkt

$$|b(u, v)| \leq c \|u\|_V \|v\|_V \quad \text{für alle } u, v \in V, c > 0,$$

und positiv definit

$$b(u, u) \geq m \|u\|_V^2 \quad \text{für alle } u \in V, m > 0,$$

ist.

Satz 5.7 Satz von Lax²–Milgram³. Sei $b(\cdot, \cdot) : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte und positiv definite Bilinearform auf dem Hilbert-Raum V . Zu jedem beschränkten linearen Funktional $f \in V'$ gibt es genau ein $u \in V$ mit

$$b(u, v) = f(v) \quad \text{für alle } v \in V. \quad (5.6)$$

Beweis: Mit Hilfe des Rieszschen Darstellungssatzes werden lineare Operatoren $T, T' : V \rightarrow V$ durch

$$a(Tu, v) = b(u, v) \quad \forall v \in V, \quad a(T'u, v) = b(v, u) \quad \forall v \in V \quad (5.7)$$

definiert. Da $b(u, \cdot)$ und $b(\cdot, u)$ stetige lineare Funktionale auf V sind, existieren $Tu, T'u$ und sind eindeutig bestimmt. Weil die Operatoren der Bedingung

$$a(Tu, v) = a(u, T'v)$$

genügen, wird T' der adjungierte Operator zu T genannt. Wir setzen $v = Tu$ in (5.7) und erhalten aus der Beschränktheit von $b(\cdot, \cdot)$

$$\|Tu\|_V^2 = a(Tu, Tu) = b(u, Tu) \leq c \|u\|_V \|Tu\|_V \implies \|Tu\|_V \leq c \|u\|_V$$

für alle $u \in V$. Damit ist T beschränkt. Da T linear ist *Übungsaufgabe*, ist T damit stetig. Mit dem gleichen Argument ist auch T' stetig.

Man definiert die Bilinearform

$$d(u, v) := a(TT'u, v) = a(T'u, T'v) \quad \forall u, v \in V.$$

Die Bilinearform $d(\cdot, \cdot)$ ist symmetrisch. Mit Hilfe der Positivität von $b(\cdot, \cdot)$ und der Cauchy–Schwarz–Ungleichung erhält man

$$m^2 \|v\|_V^4 \leq b(v, v)^2 = a(v, T'v)^2 \leq \|v\|_V^2 \|T'v\|_V^2 = \|v\|_V^2 d(v, v).$$

Damit und der Beschränktheit von T' erhält man

$$m^2 \|v\|_V^2 \leq d(v, v) = a(T'v, T'v) = \|T'v\|_V^2 \leq C \|v\|_V^2.$$

Demzufolge ist $d(\cdot, \cdot)$ auch positiv definit und erzeugt ein Skalarprodukt auf V . Die durch $d(v, v)^{1/2}$ erzeugte Norm ist äquivalent zu $\|v\|_V$. Aus dem Rieszschen Darstellungssatz folgt nun, dass es ein $w \in V$ gibt mit

$$d(w, v) = f(v) \quad \forall v \in V.$$

Nun ist $u = T'w$ die Lösung von (5.6), da

$$f(v) = d(w, v) = a(T(T'w), v) = b(T'w, v) \quad \forall v \in V.$$

Die Eindeutigkeit von u wird genauso wie im symmetrischen Fall bewiesen. *Übungsaufgabe* ■

Nun betrachten wir das Problem

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot (A(\mathbf{x})\nabla u) + c(\mathbf{x})u &= f & \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\ u &= 0 & \text{auf } \partial\Omega, \end{aligned} \quad (5.8)$$

mit $A(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ für jeden Punkt $\mathbf{x} \in \Omega$. Die Koeffizienten $a_{ij}(\mathbf{x})$ und $c(\mathbf{x}) \geq 0$ werden als beschränkt vorausgesetzt. Die Matrix A wird in jedem Punkt $\mathbf{x} \in \Omega$ als

²Lax

³Milgram

gleichmäßig elliptisch vorausgesetzt, d.h. es gibt positive Konstanten m und M , so dass

$$m \|\mathbf{y}\|_2^2 \leq \mathbf{y}^T A(\mathbf{x})\mathbf{y} = \mathbf{y}^T A(\mathbf{x})^T \mathbf{y} \leq M \|\mathbf{y}\|_2^2 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^d \text{ und } \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}.$$

Die schwache Form von (5.8) wird auf die übliche Art und Weise gewonnen, indem man (5.8) mit Testfunktionen $v \in H_0^1(\Omega)$ multipliziert, über Ω integriert und partielle Integration anwendet um Ableitungen auf die Testfunktion zu übertragen: Finde $u \in H_0^1(\Omega)$, so dass

$$a(u, v) = f(v) \quad \text{für alle } v \in H_0^1(\Omega)$$

mit

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x})^T A(\mathbf{x})^T \nabla v(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \\ f(v) &= \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Diese Bilinearform ist beschränkt: *Übungsaufgabe* Die positive Definitheit erhält man aus der gleichmäßigen Elliptizität von $A(\mathbf{x})$ und der Nichtnegativität von $c(\mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} \nabla u(\mathbf{x})^T A(\mathbf{x})^T \nabla u(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\geq \int_{\Omega} m \nabla u(\mathbf{x})^T \nabla u(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = m \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Aus dem Satz von Lax–Milgram folgt nun die Existenz und Eindeutigkeit der schwachen Lösung von (5.8). Im unsymmetrischen Fall, $a_{ij} \neq a_{ji}$, kann diese Lösung allerdings nicht durch ein Variationsproblem charakterisiert werden.

5.4 Weitere Eigenschaften

5.4.1 Das Neumann–Problem

Im Neumann–Problem hat man Randdaten für die Normalenableitung der Lösung vorgegeben. Wir betrachten als einfachsten Fall das Poisson–Problem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} &= \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = h \quad \text{auf } \Gamma = \partial\Omega, \end{aligned} \tag{5.9}$$

wobei \mathbf{n} die Einheitsaußennormale an $\partial\Omega$ ist. Man sieht sofort, dass die Lösung dieser Gleichung nur bis auf eine additive Konstante bestimmt ist. Man braucht noch eine Zusatzbedingung zur Festlegung der Konstanten, zum Beispiel sucht man die Lösung nur unter denjenigen Funktionen mit Mittelwert 0:

$$\int_{\Omega} u \, d\mathbf{x} = 0.$$

Wir wollen das Neumann–Problem (5.9) im Rahmen der Theorie von Lax–Milgram behandeln. Formales Testen, das heißt Multiplikation von (5.9) mit einer Testfunktion v und anschließende partielle Integration, liefert

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} - \int_{\Gamma} h v \, ds = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x}.$$

Das ist eine Bilinearform. Gemäß der obigen Bemerkung wählen wir als Raum für die Lösung

$$V_N := \left\{ v \in H^1(\Omega) : \int_{\Omega} v \, d\mathbf{x} = 0. \right\}.$$

Dieser Raum wird mit der Norm und dem Skalarprodukt von $H^1(\Omega)$ ausgestattet, womit V_N ein Hilbert–Raum wird. Als Bilinearform und rechte Seite werden

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}, \\ \langle F \rangle(v) &:= \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} h v \, ds \end{aligned}$$

genommen. Nach dem Spursatz ist für $h \in L^2(\Gamma)$ die Form $\langle F \rangle$ stetig auf V_N . Aus Lemma 4.15 erhält man, dass für beschränkte Gebiete eine Konstante $C > 0$ existiert mit

$$\|v\|_{H^1} \leq C \|\nabla v\|_{L^2} \quad \forall v \in V_N, \int_{\Omega} v \, d\mathbf{x} = 0. \quad (5.10)$$

Damit definiert die Bilinearform $a(\cdot, \cdot)^{1/2}$ eine Norm auf V_N .

Der Satz von Lax–Milgram 5.7 liefert die Existenz einer Lösung $u \in V_N$ des Neumann–Problems

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f v \, d\mathbf{x} + \int_{\Gamma} h v \, ds \quad \forall v \in H^1(\Omega). \quad (5.11)$$

Die Gleichung (5.11) wird schwache Formulierung von (5.9) genannt. Wählt man speziell $v \in \mathcal{D}$, dann folgt $-\Delta u = f$ im Distributionssinne.

Die Neumann–Randbedingung ist im allgemeinen nicht mehr im Spursinne erfüllt (man hat $h \in H^{-1/2}(\Gamma)$). Die Erfüllung im Spursinn ist erst gegeben, wenn die Lösung genügend regulär ist, dass heißt $u \in H^2(\Omega)$.

5.4.2 $H^2(\Omega)$ –Regularität

An dieser Stelle soll nur ein Satz ohne Beweis zitiert werden. Wir betrachten das Problem: finde $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$(A\nabla u, \nabla v) + (cu, v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (5.12)$$

Satz 5.8 Seien $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$ beschränkt und $\partial\Omega$ von der Klasse C^2 . Für die Koeffizienten von (5.12) gelte

- i) $a_{ij} = a_{ji} \in C^1(\overline{\Omega})^{d \times d}$,
- ii) A sei gleichmäßig elliptisch,
- iii) $c \in L^\infty(\Omega)$ mit $c(\mathbf{x}) \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \Omega$ und
- iv) $f \in L^2(\Omega)$.

Dann existiert genau eine Lösung u von (5.12) und es gilt sogar $u \in H^2(\Omega)$. Des weiteren gilt die a priori Abschätzung

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

mit $C = C(\|\partial\Omega\|_{C^2}, \|A\|_{C^1(\Omega)}, \|c\|_{L^\infty(\Omega)})$.

Für einen Beweis sei auf das Buch von Evans, Abschnitt 6.3, verwiesen oder auf das Buch von Grisvard [Gri85], Theorem 2.2.2.3.

Die $H^2(\Omega)$ –Regularität der Lösung hat man also nur bei glatten Daten, insbesondere bei glatten Gebietsrändern. Das stellt ein Problem für die Analysis von

numerischen Verfahren dar, da diese glatte Gebietsränder im allgemeinen nur approximieren können und damit ein zusätzlicher Fehler entsteht, siehe zum Beispiel Abschnitt 12.2.

Für $d = 2$ kann man die Voraussetzungen abschwächen. Da reicht schon Lipschitz-Rand und konvexes Gebiet, siehe das Standardwerk über den Einfluss der Randglattheit auf die Regularität der Lösung von Grisvard [Gri85].

Kapitel 6

Darstellungsformeln für Lösungen von elliptischen Differentialgleichungen

6.1 Fundamentallösung

Man kennt eine spezielle Lösung der Poisson–Gleichung auf \mathbb{R}^d , die man Newton–Potential oder Fundamentallösung nennt.

Definition 6.1 *Fundamentallösung.* Im \mathbb{R}^d werden die Funktionen $\Phi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ mit

$$\Phi(\mathbf{x}) := \begin{cases} -c_{\Phi,2} \log \|\mathbf{x}\|_2 & \text{für } d = 2, \\ c_{\Phi,d} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2^{d-2}} & \text{für } d \geq 3 \end{cases} \quad (6.1)$$

mit den Konstanten

$$c_{\Phi,2} = \frac{1}{2\pi}, \quad c_{\Phi,d} = \frac{1}{d(d-2)\omega_d}, \quad d \geq 3,$$

ω_d – Volumen der Einheitskugel in \mathbb{R}^d , Fundamentallösungen oder Newton–Potential genannt. \square

Bemerkung 6.2

- 1.) Da $\Phi(\mathbf{x}) = \varphi(r)$, wird auch $\Phi(r)$ geschrieben.
- 2.) Tatsächlich gilt $\Phi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. *Übungsaufgabe, Integrale berechnen*
- 3.) Es gilt sogar $\Phi \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Der Gradient hat die dimensionsunabhängige Gestalt

$$\nabla \Phi(\mathbf{x}) = -\frac{1}{d\omega_d} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2} \frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2^{d-1}} = -\frac{1}{d\omega_d} \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|_2^d}. \quad (6.2)$$

Man nutzt, dass $\nabla \|\mathbf{x}\|_2 = \mathbf{x}/\|\mathbf{x}\|_2$. *Übungsaufgabe zu zeigen, dass diese Funktion in $W^{1,1}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.* \square

Satz 6.3 *Es gilt $-\Delta \Phi = \delta_0$ im Sinne der Distributionen (Dirac–Distribution).*

Beweis: Wir betrachten zuerst $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. In diesen Punkten kann man die Ableitungen klassisch berechnen. Ausgehend vom Gradienten (6.2) erhält man mit Quotientenregel

$$\begin{aligned}\Delta\Phi(\mathbf{x}) &= \nabla \cdot \nabla\Phi(\mathbf{x}) \\ &= -\frac{1}{d\omega_d} \sum_{k=1}^d \partial_k \left(\frac{x_k}{\|\mathbf{x}\|_2^d} \right) = -\frac{1}{d\omega_d} \sum_{k=1}^d \left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|_2^d} - \frac{x_k d \|\mathbf{x}\|_2^{d-1} x_k}{\|\mathbf{x}\|_2^2 \|\mathbf{x}\|_2^{2d}} \right) \\ &= -\frac{1}{d\omega_d} \left(\frac{d}{\|\mathbf{x}\|_2^d} - \frac{d}{\|\mathbf{x}\|_2^{d+2}} \sum_{k=1}^d x_k^2 \right) = \frac{1}{d\omega_d} \left(\frac{d}{\|\mathbf{x}\|_2^d} - \frac{d}{\|\mathbf{x}\|_2^d} \right) = 0.\end{aligned}$$

Für $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ betrachten wir eine beliebige Testfunktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Man erhält mit der Definition der Ableitung einer Distribution, partieller Integration, dem kompakten Träger von φ , der Regularität von Φ und nochmaliger partieller Integration

$$\begin{aligned}\langle -\Delta\Phi, \varphi \rangle &= -\int_{\mathbb{R}^d} \Phi \Delta\varphi \, d\mathbf{x} = \int_{\mathbb{R}^d} \nabla\Phi \cdot \nabla\varphi \, d\mathbf{x} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \nabla\Phi \cdot \nabla\varphi \, d\mathbf{x} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[-\int_{\mathbb{R}^d \setminus B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \Delta\Phi \varphi \, d\mathbf{x} + \int_{\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \varphi \nabla\Phi \cdot \mathbf{n} \, ds \right].\end{aligned}$$

Der erste Summand verschwindet, da $\Delta\Phi$ verschwindet. Die Normalenableitung im Randintegral ist die Richtungsableitung nach $-\mathbf{s}/\varepsilon$ (Normale ist zu $\mathbf{0}$ hin gerichtet, Division durch ε wegen Normierung). Mit der Darstellung des Gradienten von Φ erhält man ($\partial_{\mathbf{s}/\varepsilon} \Phi = \nabla\Phi \cdot \mathbf{s}/\varepsilon$)

$$\begin{aligned}\int_{\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \varphi \nabla\Phi \cdot \mathbf{n} \, ds &= \int_{\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \varphi \frac{1}{d\omega_d} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^{d+1}} \, ds = \frac{1}{d\omega_d \varepsilon^{d-1}} \int_{\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \varphi \, ds \\ &= \frac{1}{|\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)|} \int_{\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \varphi \, ds.\end{aligned}\tag{6.3}$$

Das ergibt (beachte ω_d ist das Volumen der Einheitskugel)

$$\langle -\Delta\Phi, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial B(\mathbf{0}, \varepsilon)} \varphi \, ds = \varphi(\mathbf{0}).$$

Dadurch, dass (6.3) gerade der Mittelwert ist, ist auch die Wahl der Vorfaktoren motiviert. \blacksquare

Die Fundamentallösung gibt uns ein Mittel zum Lösen der Poisson-Gleichung im Gesamttraum in die Hand.

Satz 6.4 Sei $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit kompaktem Träger. Dann löst die Funktion

$$u(\mathbf{x}) := (\Phi * f)(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y}) \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, d\mathbf{y}\tag{6.4}$$

die Gleichung $-\Delta u = f$ im Sinne der Distributionen. Es gilt $u \in W_{\text{loc}}^{1, \infty}(\mathbb{R}^d)$.

Beweis: Sei zunächst $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. Dann gilt mit Vertauschung von Integration und Differentiation, der Definition einer regulären Distribution und Satz 6.3

$$\begin{aligned}-\Delta u(\mathbf{x}) &= -\Delta(\Phi * f)(\mathbf{x}) = (\langle -\Delta\Phi, * f \rangle)(\mathbf{x}) = \langle -\Delta\Phi, f(\mathbf{x} - \cdot) \rangle \\ &= \delta_{\mathbf{0}}(f(\mathbf{x} - \cdot)) = f(\mathbf{x})\end{aligned}$$

(Funktionswert von f für $\cdot = \mathbf{0}$).

Nun betrachten wir ein allgemeines $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ mit Träger $S := \text{supp}(f) \subset \mathbb{R}^d$. Für die Fundamentallösung gilt sogar $\Phi \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$ für ein $p > 1$. Es gilt insbesondere $f \in L^q(S)$, $p^{-1} + q^{-1} = 1$, und in diesem Raum wird f mit Funktionen $f_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ mit Träger $\text{supp}(f_k) \subset S$ approximiert. Das geht nach Satz 4.4. Die zugehörigen Funktionen $u_k := \Phi * f_k$ erfüllen

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, R)} |u_k(\mathbf{x}) - u_m(\mathbf{x})| &\leq \sup_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, R)} \int_{\mathbb{R}^d} |f_k(\mathbf{y}) - f_m(\mathbf{y})| |\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})| d\mathbf{y} \\ &= \sup_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, R)} \int_S |f_k(\mathbf{y}) - f_m(\mathbf{y})| |\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})| d\mathbf{y} \\ &\leq \|f_k - f_m\|_{L^q(S)} \sup_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, R)} \|\Phi(\mathbf{x} - \cdot)\|_{L^p(S)} \\ &\leq \|f_k - f_m\|_{L^q(S)} \|\Phi\|_{L^p(S^*)} \end{aligned}$$

wobei im vorletzten Schritt die Höldersche Ungleichung genutzt wurde und S^* so gewählt wurde, dass

$$S \subset S^* \quad \forall \mathbf{y} \in S, \forall \mathbf{x} \in B(\mathbf{0}, R).$$

Damit folgt, dass u_k lokal (in $B(\mathbf{0}, R)$) gleichmäßig (unabhängig von \mathbf{x}) konvergiert, da der Wert des Supremums für eine feste Funktion und ein festes Gebiet genommen wird, also eine Konstante ist. Insbesondere folgt, dass $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = u \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Mit einer ähnlichen Rechnung erhält man auch $\nabla u \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, indem man die Ableitung in das Integral zieht wo diese nur auf Φ wirkt und man nutzt, dass $\nabla \Phi \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

Insbesondere gilt $u_k \rightarrow u$ und $f_k \rightarrow f$ im Sinne der Distributionen. Da die Ableitungen von Distributionen bezüglich der Konvergenz stetig sind, impliziert mit dem ersten Teil des Beweises dies $-\Delta u = f$. \blacksquare

6.2 Greensche Funktionen

Die Formel (6.4) ist sehr hilfreich, denn die Lösung u wird explizit als Integral dargestellt. Das nächste Ziel besteht darin, eine ähnliche Darstellung für ein beschränktes Gebiet Ω zu gewinnen.

Wir nehmen an, dass $u \in \mathcal{D}(\Omega)$. Es folgt insbesondere $\Delta u \in L^p(\Omega)$ für $p > d/2$. Die Funktion u sei Lösung der Poisson-Gleichung im Sinne der Distributionen und die Spur von u auf dem Rand $\partial\Omega$ werde mit g bezeichnet. Dann setzen wir $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ und kehren mit dieser Funktion die obige Rechnung um (durch zweimalige Anwendung des Satzes von Gauß)

$$\begin{aligned} u(\mathbf{x}) &= \delta_{\mathbf{x}}(u) = (-\Delta_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \cdot))(u) = \int_{\Omega} (-\Delta_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})) u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} \\ &= - \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Delta u(\mathbf{y}) d\mathbf{y} - \int_{\partial\Omega} u(\mathbf{s}) \nabla_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{s} \\ &\quad + \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \nabla u(\mathbf{s}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{s}. \end{aligned} \tag{6.5}$$

In dieser Rechnung wurde nur $-\Delta_{\mathbf{y}} G(\mathbf{x}, \cdot) = \delta_{\mathbf{x}}$ (Satz 6.3) verwendet. Wir wollen nun die Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ so modifizieren, dass in der obigen Rechnung das letzte Integral wegfällt. Dazu setzen wir

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + H(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

mit $H : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mit $H(\mathbf{x}, \cdot) \in H^2(\Omega)$ und $\Delta_{\mathbf{y}}H(\mathbf{x}, \cdot) = 0$. Dazu muss H noch so gewählt sein, dass $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ für alle $\mathbf{x} \in \Omega$ und für alle $\mathbf{y} \in \partial\Omega$. Damit hätten wir das Ziel erreicht und (6.5) wird

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{s})\nabla_{\mathbf{y}}G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

Nun ist die Lösung u durch ein Integral mit den Daten f und g dargestellt. Beachte, diese Darstellung ist zugeschnitten auf Dirichlet–Randwerte.

Definition 6.5 *Greensche Funktion.* Für jedes $\mathbf{x} \in \Omega$ sei die Funktion $H(\mathbf{x}, \cdot)$ Lösung der Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta_{\mathbf{y}}H(\mathbf{x}, \cdot) &= 0 && \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^d, \\ H(\mathbf{x}, \cdot) &= -\Phi(\mathbf{x} - \cdot) && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Dann heißt die Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + H(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ Greensche Funktion zum Dirichlet–Problem. \square

Satz 6.6 *Sei Ω ein beschränktes Gebiet mit C^2 –Rand. Dann existiert eine Greensche Funktion $G(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ zum Dirichlet–Problem gemäß Definition 6.5 mit $H(\mathbf{x}, \cdot) \in H^2(\Omega)$. Für jedes $u \in C(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ mit $f := -\Delta u \in L^p(\Omega)$, $p > d/2$ und g der Spur von u auf $\partial\Omega$ und jedes $\mathbf{x} \in \Omega$ gilt*

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} - \int_{\partial\Omega} g(\mathbf{s})\nabla_{\mathbf{y}}G(\mathbf{x}, \mathbf{s}) \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad (6.6)$$

Beweis: Die Existenz von $H(\mathbf{x}, \cdot)$ folgt aus Folgerung 5.6, da die Randwerte hinreichend glatt sind. Die Regularität von $H(\mathbf{x}, \cdot)$ folgt aus Satz 5.8. Das gibt die Existenz der Greenschen Funktion gemäß Definition 6.5.

Zur Darstellungsformel muss man die Rechnung in (6.5) rechtfertigen, da im Satz $u \notin \mathcal{D}(\Omega)$. Dazu wiederholt man die Rechnung aus dem Beweis von Satz 6.3 für $\varphi = u$. \blacksquare

Nun betrachten wir das Neumann–Problem zur Poisson–Gleichung

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} &= \psi && \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Wir hatten für das Dirichlet–Problem die Funktion H so gewählt, dass in (6.5) das zweite Randintegral verschwindet. Für das Neumann–Problem wird nun das erste Randintegral zu Null gesetzt. Wir wählen also eine harmonische Funktion $H(\mathbf{x}, \cdot)$, für die

$$\nabla_{\mathbf{y}}H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} = -\nabla_{\mathbf{y}}\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} \quad \forall \mathbf{y} \in \partial\Omega$$

gilt. Es folgt für

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + H(\mathbf{x}, \mathbf{y}),$$

dass

$$\nabla_{\mathbf{y}}G(\mathbf{x}, \cdot) \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Damit liefert (6.5) die Darstellung

$$u(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{y})f(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} + \int_{\partial\Omega} G(\mathbf{x}, \mathbf{s})\psi(\mathbf{s}) \, ds.$$

Bemerkung 6.7 Man kann die Greensche Funktion in einer Reihe von Spezialfällen explizit angeben, so zum Beispiel auf dem Halbraum $\mathbb{R}_+^d := \{(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_d > 0\}$ oder auf einer Kugel, siehe Literatur. \square

Bemerkung 6.8 Mit Hilfe der Greenschen Funktion hat man etwas geschafft, was mit Energiemethoden nicht möglich war: Man hat zu Randwerten g eine Lösung gefungen, obwohl nur vorausgesetzt war, dass g stetig ist. Die große Einschränkung bei diesem Verfahren ist, dass es so nur für den Laplace–Operator funktioniert. \square

Kapitel 7

Maximumprinzip für elliptische Gleichungen

In diesem Kapitel wird das Maximumprinzip für allgemeinere Gleichungen als die Laplace-Gleichung untersucht.

Wir betrachten den Operator $L : H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ definiert durch

$$Lu(\mathbf{x}) = - \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(\mathbf{x}) \partial_i \partial_j u(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^d b_i(\mathbf{x}) \partial_i u(\mathbf{x}) + c(\mathbf{x})u(\mathbf{x}). \quad (7.1)$$

Man beachte, dass der Diffusionsterm diesmal nicht in Divergenzform geschrieben ist. Es wird wiederum die gleichmäßige Elliptizität vorausgesetzt: es gibt ein $\gamma > 0$, so dass gilt

$$\boldsymbol{\xi}^T A(\mathbf{x}) \boldsymbol{\xi} \geq \gamma \|\boldsymbol{\xi}\|_2^2 \quad \forall \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \mathbf{x} \in \Omega.$$

Alle Koeffizientenfunktionen seien stetig auf Ω und $A(\mathbf{x})$ sei symmetrisch.

Zuerst wollen wir das schwache Maximumprinzip beweisen. Dieses erlaubt noch innere lokale Maxima.

Satz 7.1 Schwaches Maximumprinzip. *Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ und gelte in L dass $c(\mathbf{x}) \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \Omega$. Falls $Lu \leq 0$ und $m := \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} u(\mathbf{x}) \geq 0$, so gilt*

$$\max_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} u(\mathbf{x}) = m.$$

Beweis: Es wird ein zunächst ein indirekter Beweis durchgeführt. Wir nehmen also an, dass es ein $\mathbf{x}_0 \in \Omega$ so gibt, dass u in \mathbf{x}_0 ein lokales Maximum besitzt und $u(\mathbf{x}_0) > m$.

1) Zuerst wird der Fall $Lu(\mathbf{x}) < 0$ betrachtet. Wir wählen eine orthonormale Basis $V = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_d)$ des \mathbb{R}^d , so dass $A(\mathbf{x}_0)\mathbf{v}_k = \lambda_k \mathbf{v}_k$, also

$$V^T A(\mathbf{x}_0) V = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d) =: \Lambda.$$

Damit ist $A = V \Lambda V^T$ oder $a_{ij} = \sum_{k=1}^d v_{ik} \lambda_k v_{jk}$. Da u in \mathbf{x}_0 ein lokales Maximum besitzt und $\lambda_k > 0$, $k = 1, \dots, d$, gilt

$$\begin{aligned} c(\mathbf{x}_0)u(\mathbf{x}_0) &\geq c(\mathbf{x}_0)m \geq 0, \\ b_i(\mathbf{x}_0)\partial_i u_0 &= 0 \quad i = 1, \dots, d, \\ - \sum_{i,j=1}^d a_{ij}(\mathbf{x}_0)\partial_i \partial_j u(\mathbf{x}_0) &= - \sum_{i,j,k=1}^d v_{ik} \lambda_k v_{jk} \partial_i \partial_j u(\mathbf{x}_0) = - \sum_{k=1}^d \lambda_k \frac{\partial^2 u}{\partial \mathbf{v}_k^2}(\mathbf{x}_0) \geq 0. \end{aligned}$$

Insgesamt gilt also $Lu(\mathbf{x}_0) \geq 0$, was ein Widerspruch ist.

2) Nun wird der allgemeine Fall $Lu(\mathbf{x}_0) \leq 0$ untersucht. Dafür wird die Funktion

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}) := u(\mathbf{x}) + \varepsilon e^{\mu \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}}, \quad \varepsilon > 0$$

betrachtet. Es gilt

$$\begin{aligned} Lu_\varepsilon(\mathbf{x}_0) &= Lu(\mathbf{x}_0) + \varepsilon L(e^{\mu \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}_0}) \leq \varepsilon e^{\mu \mathbf{v}_1^T \cdot \mathbf{x}_0} (-\mu^2 \mathbf{v}_1 A(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_1 + c) \\ &= \varepsilon e^{\mu \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{x}_0} (-\mu^2 \lambda_1 + \mu \mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_1 + c). \end{aligned}$$

Für großes μ ist dieser Ausdruck überall negativ (unabhängig von ε), also gilt dann $Lu_\varepsilon < 0$. Das Maximum auf dem Rand m_ε der Funktion u_ε ist nichtnegativ (nach Konstruktion). Nach dem ersten Teil des Beweises gilt

$$\max_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} u_\varepsilon(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega} u_\varepsilon(\mathbf{x})$$

für alle $\varepsilon > 0$ und ein festgewähltes großes μ . Die Betrachtung von $\varepsilon \rightarrow 0$ liefert das gewünschte Ergebnis. ■

Für das starke Maximumprinzip beweisen wir vorher ein Lemma.

Lemma 7.2 Lemma von Hopf¹. Sei $B \subset \mathbb{R}^d$ eine Kugel und $u \in C^2(B) \cap C^1(\overline{\Omega})$ mit $Lu \leq 0$, $c(\mathbf{x}) \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \Omega$. Falls für einen Randpunkt $\mathbf{x} \in \partial B$ gilt

$$u(\mathbf{x}) \geq 0, \quad u(\mathbf{y}) < u(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{y} \in B,$$

dann gilt für den Einheits-Außennormalenvektor \mathbf{n} an ∂B auch $\nabla u \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) > 0$.

Beweis: Die Eigenschaft $\nabla u \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \geq 0$ folgt aus der Maximalität von u an der Stelle \mathbf{x} . Wichtig ist die strikte Ungleichung.

Ohne Einschränkung der Allgemeinheit sei $B = B(\mathbf{0}, r)$. Für $\mu > 0$ betrachten wir die Funktion

$$v(\mathbf{x}) := e^{-\mu \|\mathbf{x}\|_2^2} - e^{-\mu r^2} \geq 0.$$

Es gilt *Übungsaufgabe*

$$\begin{aligned} Lv(\mathbf{x}) &= e^{-\mu \|\mathbf{x}\|_2^2} \left[\sum_{i,j=1}^d (-4\mu^2 a_{ij}(\mathbf{x}) x_i x_j - 2\mu a_{ij}(\mathbf{x}) \delta_{ij}) + \mu \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} + c(\mathbf{x}) \right] \\ &\quad - c(\mathbf{x}) e^{-\mu r^2}. \end{aligned}$$

Für hinreichend große μ ist dies für $\|\mathbf{x}\|_2 > r/2$ negativ, also $Lv < 0$ auf $B(\mathbf{0}, r) \setminus B(\mathbf{0}, r/2)$.

Nun wird die Funktion $w(\mathbf{y}) := u(\mathbf{y}) + \varepsilon v(\mathbf{y})$ betrachtet. Wegen $Lw \leq 0$ auf $B(\mathbf{0}, r) \setminus B(\mathbf{0}, r/2)$ kann man das schwache Maximumprinzip anwenden. Auf $\partial B(\mathbf{0}, r)$ gilt $w(\mathbf{y}) = u(\mathbf{y})$, da v auf dem Rand von $B(\mathbf{0}, r)$ verschwindet. Also ist das Maximum von w auf $\partial B(\mathbf{0}, r)$ der Wert $u(\mathbf{x}) \geq 0$. Auf $\partial B(\mathbf{0}, r/2)$ gilt nach den Eigenschaften von u , das $w(\mathbf{y}) = u(\mathbf{y}) + \varepsilon v(\mathbf{y}) \leq u(\mathbf{x})$ falls ε hinreichend klein gewählt wird. Nach dem schwachen Maximumprinzip folgt $w \leq u(\mathbf{x})$ auf $B(\mathbf{0}, r) \setminus B(\mathbf{0}, r/2)$. Wegen der Differenzierbarkeit folgt $\nabla w \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \geq 0$, also

$$\nabla u \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) = \nabla w \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) - \varepsilon \nabla v \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) \geq 0 + 2\varepsilon \mu r e^{-\mu r^2} > 0.$$

Damit ist die strikte Ungleichung gezeigt. ■

¹Hopf

Satz 7.3 Starkes Maximumprinzip. Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ zusammenhängend und L definiert in (7.1) mit $c(\mathbf{x}) > 0$ für alle $\mathbf{x} \in \Omega$. Dann gilt für $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit $Lu \leq 0$ und

$$u(\mathbf{y}) = \max_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} u(\mathbf{x}) \geq 0$$

für ein $\mathbf{y} \in \Omega$, dass u konstant ist.

Beweis: Seien $M := \max_{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}} u(\mathbf{x})$ und

$$\Sigma := \{\mathbf{x} \in \Omega : u(\mathbf{x}) = M\}.$$

Man muss zeigen, dass $\Sigma = \Omega$ gilt. Angenommen, das gelte nicht. Dann kann man ein $\mathbf{z} \in \Omega \setminus \Sigma$ so wählen, dass $r := \text{dist}(\mathbf{z}, \Sigma) < \text{dist}(\mathbf{z}, \partial\Omega)$. Die Kugel $B(\mathbf{z}, r)$ ist dann kompakt (mit ihrem Rand) in Ω enthalten. In dieser Kugel gilt $Lu \leq 0$ und, wenn man sich auf $\overline{B}(\mathbf{z}, r)$ einschränkt, nimmt u sein Maximum in einem Randpunkt $\mathbf{x} \in \partial B(\mathbf{z}, r)$ an und es gilt $u(\mathbf{x}) = M$ nach Konstruktion der Kugel. Nach Lemma 7.2 folgt, dass in dieser Situation $\nabla u \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}) > 0$ gilt, wobei \mathbf{n} die Einheits-Außennormale an $\partial B(\mathbf{z}, r)$ im Punkte \mathbf{x} ist. Das heißt, die Funktion steigt in \mathbf{x} in Richtung der Außennormale an. Dies steht aber im Widerspruch zur Maximalität $u(\mathbf{x}) = M$. ■

Kapitel 8

Darstellungsformeln für die Lösung von parabolischen Differentialgleichungen

Wir hatten im Beispiel 5.2 gesehen, dass die Wärmeleitungsgleichung

$$\partial_t u - \Delta u = f \quad \text{auf } \Omega \times (0, \infty) \quad (8.1)$$

eine parabolische Differentialgleichung ist. Der physikalische Hintergrund legt nahe, dass man die Daten der Wärmeverteilung $u_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ zum Zeitpunkt $t = 0$ sowie die Temperatur am Rand $g : \partial\Omega \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ als Daten des physikalischen Prozesses benötigt. Im Abschnitt 1.3.2 wurden bereits ein Maximumprinzip und die Eindeutigkeit der Lösung für (8.1) gezeigt.

8.1 Die Fundamentallösung im Ganzraum

Wir betrachten (8.1) für $\Omega = \mathbb{R}^d$. In diesem Fall wird die Randbedingung g durch eine Beschränktheitsanforderung an $u(\cdot, t)$ ersetzt.

Sei zunächst $f = 0$. Das einzige Datum im Problem ist nun die Anfangsbedingung. Angenommen, man könnte in diesem Fall die eindeutige Lösbarkeit der Wärmeleitungsgleichung zeigen, dann würde das eine Abbildung von den Anfangsbedingungen u_0 auf die Lösungen $u(t)$ der homogenen Gleichung definieren:

$$S(t) : u_0 \mapsto u(t).$$

Der Operator $S(t)$ ist ein sogenannter Evolutionsoperator: Für ein System im Zustand u_0 gibt der Operator an, in welchem Zustand das System eine Zeit t später sein wird. Es gilt

$$S(t + s) = S(t) \circ S(s),$$

denn die Daten der homogenen Gleichung enthalten keine Abhängigkeit von der Zeit. Das heißt, der Zustand zur Zeit $t + s$ ist identisch damit, dass der Prozess mit Anfangsbedingung u_0 bis zur Zeit s betrachtet wurde und danach der Zustand zur Zeit s als Anfangsbedingung für den Prozess bis zur Zeit t genommen wurde. Diese Eigenschaft ist der Grund für die folgende Definition.

Definition 8.1 Die Familie $S(t), t \in [0, \infty)$, wird Halbgruppe zur Evolutionsgleichung genannt. \square

Definition 8.2 Die Funktion

$$\Phi(\mathbf{x}, t) := \begin{cases} \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} e^{-\|\mathbf{x}\|_2^2/(4t)} & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, t > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (8.2)$$

wird Fundamentallösung der Wärmeleitungsgleichung genannt. \square

Das Konzept ist nun so ähnlich wie bei der Poisson-Gleichung. Zunächst rechnet man nach, dass Φ Lösung von (8.1) mit $f = 0$ außerhalb des singulären Punkts $t = 0$ ist. *Übungsaufgabe*

Nun wird gezeigt, dass $\Phi(\cdot, t)$ die Wärmeverteilung zur Zeit $t > 0$ beschreibt, wenn zur Zeit $t = 0$ die Wärmemenge 1 im Punkt $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ konzentriert war.

Lemma 8.3 Die Funktion Φ ist Lösung der Wärmeleitungsgleichung (8.1) mit $f = 0$ zur Anfangsbedingung

$$\Phi(\cdot, t_k) \rightarrow \delta_{\mathbf{0}} \quad \text{in } \mathcal{D}' \quad (8.3)$$

für $0 < t_k \rightarrow 0$.

Beweis: Dass Φ die homogene Wärmeleitungsgleichung für $t > 0$ löst, ist eine Übungsaufgabe. Wir zeigen nun, dass die Gesamtwärmemenge für $t > 0$ gleich 1 ist.

Es gilt für alle $t > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} &= \frac{1}{(4\pi t)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|\mathbf{x}\|_2^2/(4t)} \, d\mathbf{x} = \frac{1}{\pi^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|\mathbf{z}\|_2^2} \, d\mathbf{z} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \prod_{i=1}^d \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-z_i^2} \, dz_1 \cdots dz_d = \prod_{i=1}^d \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-z_i^2} \, dz_i \right) = 1. \end{aligned}$$

Die Substitution $\mathbf{z} = \mathbf{x}/(2\sqrt{t})$ wurde verwendet. Das letzte Integral wird mit Hilfe von Polarkoordinaten berechnet ($\mathbf{z} = (z_1, z_2)^T$):

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-z^2} \, dz \right)^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-z_1^2} \, dz_1 \right) \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-z_2^2} \, dz_2 \right) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\|\mathbf{z}\|_2^2} \, d\mathbf{z} \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_0^\infty r e^{-r^2} \, dr \right) d\phi = -2\pi \frac{e^{-r^2}}{2} \Big|_{r=0}^{r=\infty} = \pi. \end{aligned}$$

Nun wollen wir (8.3) zeigen. Außerhalb jeder Kugel $B(\mathbf{0}, \rho) \subset \mathbb{R}^d$ mit $\rho > 0$ gilt $\Phi(\cdot, t_k) \rightarrow 0$ gleichmäßig für $t_k \rightarrow 0$ (unabhängig von \mathbf{x} , da $e^{-\|\mathbf{x}\|_2^2/(4t)} \leq 1$). Sei nun $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ eine Testfunktion. Da φ stetig ist, findet man zu jedem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ ein $\rho > 0$ mit $|\varphi(\mathbf{y}) - \varphi(\mathbf{0})| \leq \varepsilon/2$ für alle $\mathbf{y} \in B(\mathbf{0}, \rho)$. Damit und dem ersten Teil des Beweises folgt

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{x}, t_k) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \varphi(\mathbf{0}) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{x}, t_k) (\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{0})) \, d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(\mathbf{0}, \rho)} \Phi(\mathbf{x}, t_k) (\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{0})) \, d\mathbf{x} \right| + \left| \int_{B(\mathbf{0}, \rho)} \Phi(\mathbf{x}, t_k) (\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{0})) \, d\mathbf{x} \right|. \end{aligned}$$

Der erste Term konvergiert gegen Null, da $\Phi(\cdot, t_k) \rightarrow 0$ gleichmäßig für $t_k \rightarrow 0$. Es folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{x}, t_k) \varphi(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} - \varphi(\mathbf{0}) \right| &\rightarrow \left| \int_{B(\mathbf{0}, \rho)} \Phi(\mathbf{x}, t_k) (\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{0})) \, d\mathbf{x} \right| \\ &\leq \int_{B(\mathbf{0}, \rho)} |\Phi(\mathbf{x}, t_k)| |\varphi(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{0})| \, d\mathbf{x} \leq \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

für $t_k \rightarrow 0$. Für kleines t_k gilt also $|\langle \Phi(\cdot, t_k) \rangle(\varphi) - \varphi(\mathbf{0})| < \varepsilon$, womit (8.3) gezeigt ist. ■

8.2 Lösung der homogenen Gleichung im Ganzraum

Wir nutzen nun physikalische Intuition, um eine Lösung zu erraten. In jedem Punkt $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ ist zu Beginn die Wärmemenge $u_0(\mathbf{y})$. Diese Wärmemenge ergibt nach der Zeit $t > 0$ eine Wärmeänderung am Ort \mathbf{x} um $u_0(\mathbf{y})\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t)$, denn $\Phi(\cdot, t)$ gibt für anfängliche Punktwärme die Verteilung nach der Zeit t an. Die Gesamtlösung ergibt sich nun als Superposition der Einzellösungen, also als Integral.

Satz 8.4 Die Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 & \text{auf } \mathbb{R}^d \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) &= u_0 & \text{auf } \mathbb{R}^d \end{aligned} \quad (8.4)$$

für $u_0 \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist gegeben durch

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) u_0(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}. \quad (8.5)$$

Genauer gilt

- 1.) $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d \times (0, \infty))$ und es gilt die obere Gleichung von (8.4),
- 2.) $u \in C(\mathbb{R}^d \times [0, \infty))$ und es gelten beide Gleichungen von (8.4).

Beweis: 1.) Wegen $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist das Integral in (8.5) wohldefiniert. Alle Ableitungen von $\Phi(\cdot, t)$ sind wieder integrierbar (*Übungsaufgabe*) und man kann die Funktion Φ unter dem Integral differenzieren. Damit ist $u(\cdot, t)$ aus $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ (beim Differenzieren nach \mathbf{x} spielt u_0 keine Rolle) und es gilt, da $t > 0$ ist,

$$(\partial_t - \Delta) u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t - \Delta) \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) u_0(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} = 0.$$

Damit löst u die obere Gleichung von (8.4).

2.) In der Rechnung $\langle \Phi(\cdot, t_k) \rangle(\varphi) \rightarrow \varphi(\mathbf{0})$ im Beweis von Lemma 8.3 hatten wir nur die Stetigkeit von φ ausgenutzt. Insbesondere kann man $\varphi = u_0$ setzen. Mit derselben Rechnung erhält man für $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{x}_0$ und $t_k \rightarrow 0$

$$u(\mathbf{x}_k, t_k) = \langle \Phi(\cdot - \mathbf{x}_k, t_k) \rangle(u_0) \rightarrow \delta_{\mathbf{x}_0}(u_0) = u_0(\mathbf{x}_0).$$

Dies zeigt die Stetigkeit von u für $t \rightarrow 0$ und die zweite Gleichung von (8.4). ■

8.3 Die Lösung des inhomogenen Problems

Eine rechte Seite $f(\mathbf{x}, t)$ in der Wärmeleitungsgleichung bedeutet physikalisch eine Wärmequelle. Zur Zeit t wird an der Stelle \mathbf{x} dem System die Wärmemenge $f(\mathbf{x}, t)$ zugeführt (oder entzogen, falls das Vorzeichen von $f(\mathbf{x}, t)$ negativ ist). Dabei ist f als Dichte der Quelle zu sehen, die über Raum und Zeit verteilt ist. Wir setzen dann eine Funktion aus den Einzellösungen zusammen, die zu den Quelltermen gehören

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} f(\mathbf{y}, s) \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \, d\mathbf{y} ds. \quad (8.6)$$

Es wird jetzt in einem einfachen Fall nachgewiesen, dass die so definierte Funktion tatsächlich eine Lösung der inhomogenen Wärmeleitungsgleichung ist.

Lemma 8.5 Die Funktion Φ , trivial fortgesetzt auf $\mathbb{R}^d \times (-\infty, 0]$, erfüllt im Distributionssinne auf $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$

$$(\partial_t - \Delta) \Phi = \delta_{\mathbf{0}}.$$

Beweis: Wir betrachten eine Funktion $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ und einen Raum-Zeit-Zylinder $Q_{\delta, \tau} := B(\mathbf{0}, \delta) \times (-\tau, \tau)$. Es gilt für beliebige $\delta, \tau > 0$

$$\begin{aligned} & \langle (\partial_t - \Delta) \Phi, \varphi \rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{x}, t) (-\partial_t - \Delta) \varphi(\mathbf{x}, t) \, dx dt \\ &= - \int_{Q_{\delta, \tau}} \Phi(\mathbf{x}, t) (\partial_t + \Delta) \varphi(\mathbf{x}, t) \, dx dt - \int_{\mathbb{R}^{d+1} \setminus Q_{\delta, \tau}} \Phi(\mathbf{x}, t) (\partial_t + \Delta) \varphi(\mathbf{x}, t) \, dx dt \\ &= - \int_{Q_{\delta, \tau}} \Phi(\mathbf{x}, t) (\partial_t + \Delta) \varphi(\mathbf{x}, t) \, dx dt + \int_{\mathbb{R}^{d+1} \setminus Q_{\delta, \tau}} (\partial_t - \Delta) \Phi(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \, dx dt \\ &\quad + \left[\int_{B(\mathbf{0}, \delta)} \Phi(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t) \, d\mathbf{x} \right]_{-\tau}^{\tau} \\ &\quad - \int_{-\tau}^{\tau} \int_{\partial B(\mathbf{0}, \delta)} (\Phi \nabla \varphi \cdot \mathbf{n} - \nabla \Phi \cdot \mathbf{n} \varphi)(\mathbf{s}, t) \, ds dt. \end{aligned}$$

Im ersten Integral ist $(\partial_t + \Delta) \varphi(\mathbf{x}, t)$ beschränkt und Φ hat beschränkte Integrale im Raum. Für τ klein, ist dieses Integral also auch klein und konvergiert gegen Null.

Das zweite Integral verschwindet, da Φ klassische Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung außerhalb des Nullpunkts ist.

Für das dritte Integral betrachten wir $\delta \gg \tau$ und $\delta \rightarrow 0$. Wie im Beweis von Lemma 8.3 rechnet man nach, dass das Integral gegen $\varphi(\mathbf{0})$ konvergiert. Dieses Integral liefert die rechte Seite in der Behauptung des Lemmas.

Auch für das vierte Integral betrachten wir $\delta \gg \tau$ und $\delta \rightarrow 0$. Dann ist das Integral wegen des exponentiellen Faktors von Φ klein und konvergiert gegen Null. \blacksquare

Das Lemma impliziert, dass

$$u(\mathbf{x}, t) := (\Phi * \varphi)(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \varphi(\mathbf{y}, s) \, dy ds$$

eine Lösung von $(\partial_t - \Delta) u = \varphi$ ist, denn es gilt

$$\begin{aligned} (\partial_t - \Delta) u(\mathbf{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} (\partial_t - \Delta) \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) \varphi(\mathbf{y}, s) \, dy ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \delta_{\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s} \varphi(\mathbf{y}, s) \, dy ds = \delta_{\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s} \varphi(\mathbf{y}, s) = \varphi(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Allerdings will man normalerweise nicht für negative Zeiten lösen. Man hat im allgemeinen auch gar keine rechte Seite für negative Zeiten gegeben. Deshalb betrachten wir den Fall, dass die rechte Seite gegeben ist als $f = \varphi \chi_{[0, \infty)}$, wobei χ_I die charakteristische Funktion des Intervalls I bezeichnet (1 in I und 0 außerhalb von I) und ψ als glatt vorausgesetzt wird. Das heißt, f kann zur Zeit $t = 0$ springen. Dann gilt, dass

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) \, dy ds \quad (8.7)$$

einen Lösung für positive Zeiten ist. Sieht man sich nämlich den Beweis von Lemma 8.5 genau an, erkennt man, dass die Glattheit von φ für $t < 0$ unerheblich ist, da im ersten Integral für negative Zeiten mit Null multipliziert wird ($\Phi(\mathbf{x}, t)$ ist trivial

fortgesetzt). Zudem wirkt der Operator $(\partial_t - \Delta)$ nur auf die Fundamentallösung Φ und die Glattheit der Testfunktion wird nur in einer Umgebung von $\mathbf{0}$ ausgenutzt wurde. Deshalb reicht die Glattheit von f in einer Umgebung von (\mathbf{x}, t) , $t > 0$, die nach Konstruktion gegeben ist, dafür, dass (8.7) eine Lösung für positive Zeiten ist.

Nun wird die Lösungsdarstellung (8.7) noch vereinfacht. Für $s < 0$ verschwindet $f(\mathbf{y}, s)$ und für $s > t$ verschwindet $\Phi(\cdot, t - s)$. Man findet daher die Lösungsdarstellung

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) \, d\mathbf{y} ds,$$

also genau (8.6).

Satz 8.6 *Eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung*

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= f && \text{auf } \mathbb{R}^d \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) &= u_0 && \text{auf } \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

für $f \in C_0^2(\mathbb{R}^d \times \mathbb{R})$ und $u_0 \in C(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ ist gegeben durch

$$u(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t) u_0(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y} + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}, t - s) f(\mathbf{y}, s) \, d\mathbf{y} ds. \quad (8.8)$$

Beweis: Die Funktion (8.6) erfüllt die Anfangsbedingung $u(\cdot, 0) = 0$. Daher erfüllt die Linearkombination mit der Lösung des homogenen Problems sowohl die Anfangsbedingung als auch die Gleichung. ■

8.4 Maximumprinzip und Eindeutigkeit für Lösungen der Wärmeleitungsgleichung

Für eine klassische Lösung der Wärmeleitungsgleichung wird gefordert:

- Die erste Zeitableitung und alle zweiten Ortsableitungen existieren als stetige Funktionen.
- Die Funktion ist stetig auf dem abgeschlossenen Raum-Zeit-Zylinder $\bar{\Omega}_T = \bar{\Omega} \times [0, T]$.

Das Maximumprinzip für klassische Lösungen der Wärmeleitungsgleichung auf beschränkten Gebieten wurde bereits im Abschnitt 1.3.2 gezeigt. In diesem Abschnitt wird der Ganzraum betrachtet.

Lemma 8.7 Starkes Maximumprinzip. *Die Lösung (8.5) der homogenen Gleichung (8.4) erfüllt*

$$u(\mathbf{x}, t) \leq \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} u_0(\mathbf{x})$$

für alle $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$. Ist $u_0(\mathbf{x})$ nicht konstant, dann gilt sogar die strikte Ungleichung.

Beweis: *Übungsaufgabe* ■

Die Aussage des Lemmas bedeutet, dass ein einzelner Punkt \mathbf{x}_0 mit $u_0(\mathbf{x}_0) < \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} u_0(\mathbf{x})$ bewirkt, dass für beliebig kleine $t > 0$ überall $u(\cdot, t) < \max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} u_0(\mathbf{x})$ gilt. Man sagt, die Wärmeleitungsgleichung besitzt eine unendliche Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Für die eindeutige Lösbarkeit des Anfangswertproblems im Gesamttraum benötigt man jedoch eine etwas andere Aussage als von Lemma 8.7, nämlich, dass jede Lösung des Problems ein Maximumprinzip erfüllt. Dies ist aber im allgemeinen falsch.

Satz 8.8 *Es gibt unendlich viele Lösungen $u : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ der homogenen Wärmeleitungsgleichung (8.4).*

Beweis: Siehe Literatur, etwa [Joh82, Kapitel 7]. ■

Man benötigt für die Eindeutigkeit also noch Zusatzbedingungen.

Satz 8.9 Maximumprinzip für das Gesamttraumproblem. *Sei $u \in C(\mathbb{R}^d \times [0, T])$ mit stetigen ersten Zeit- und zweiten Ortsableitungen auf $\mathbb{R}^d \times (0, T)$ Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung (8.4). Weiter erfülle u für Konstanten $A, a > 0$ die Wachstumsbedingung*

$$u(\mathbf{x}, t) \leq Ae^{a\|\mathbf{x}\|^2} \quad \forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times (0, T). \quad (8.9)$$

Dann gilt

$$\sup_{(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times [0, T]} u(\mathbf{x}, t) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} u_0(\mathbf{x}).$$

Beweis: Es genügt, die Aussage für ein kleines Zeitintervall zu zeigen. Iteration liefert dann die Aussagen für alle Zeiten.

Wir nehmen also ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass für (kleines) $\varepsilon > 0$ gilt $4a(T + \varepsilon) < 1/2$, also $4a(T + \varepsilon) = (1 - \gamma)/2$ mit $\gamma > 0$. Nun wird für ein $\mu > 0$

$$v(\mathbf{x}, t) := u(\mathbf{x}, t) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{d/2}} e^{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 / (4(T + \varepsilon - t))}$$

definiert. Man rechnet nach, dass v die homogene Wärmeleitungsgleichung erfüllt. *Übungsaufgabe ?*

Wir wollen nun das Maximumprinzip für beschränkte Gebiete, Satz 1.9 auf v anwenden. Dazu wird $B(\mathbf{y}, r)$ für $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d$ und großes $r > 0$ betrachtet. Für die Anfangswerte gilt

$$v(\mathbf{x}, 0) \leq u(\mathbf{x}, 0) = u_0(\mathbf{x}).$$

Für die Werte $\mathbf{x} \in \partial B(\mathbf{y}, r)$ findet man mit

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{y} + \mathbf{y}\|_2^2 \leq 2 \left(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2^2 + \|\mathbf{y}\|_2^2 \right) = 2 \left(r^2 + \|\mathbf{y}\|_2^2 \right),$$

(Youngsche Ungleichung) und damit dass der zweite Term streng monoton fallend ist, dass

$$\begin{aligned} v(\mathbf{x}, t) &= u(\mathbf{x}, t) - \frac{\mu}{(T + \varepsilon - t)^{d/2}} e^{r^2 / (4(T + \varepsilon - t))} \\ &\leq Ae^{a\|\mathbf{x}\|_2^2} - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{d/2}} e^{r^2 / (4(T + \varepsilon))} \\ &\leq Ae^{2a(r^2 + \|\mathbf{y}\|_2^2)} - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{d/2}} e^{ar^2 / (4a(T + \varepsilon))} \\ &= Ae^{2a(r^2 + \|\mathbf{y}\|_2^2)} - \frac{\mu}{(T + \varepsilon)^{d/2}} e^{2ar^2 / (1 - \gamma)} \\ &\leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} u_0(\mathbf{x}) \end{aligned}$$

falls $r > 0$ groß, da dann der zweite Term dominiert ($2/(1 - \gamma) > 2$). Das Maximumprinzip auf $B(\mathbf{y}, r)$ liefert $\sup_{\mathbf{x} \in B(\mathbf{y}, r)} v(\mathbf{x}, t) \leq \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d} u_0(\mathbf{x})$. Dabei war μ beliebig. Für $\mu \rightarrow 0$ erhält man das gewünschte Ergebnis. ■

Folgerung 8.10 Eindeutigkeit der Lösung des Ganzraumproblems. *Es gibt höchstens eine klassische Lösung u des Ganzraumproblems aus Satz 8.6 unter der Wachstumsbedingung (8.9).*

Beweis: Seien u, v zwei Lösungen mit der Wachstumsbedingung (8.9). Da die Wärmeleitungsgleichung linear ist, ist die Differenz $w = u - v$ eine Lösung der homogenen Wärmeleitungsgleichung. Auch w erfüllt die Wachstumsbedingung und es gilt $w_0 = 0$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. Nach dem Maximumprinzip, Satz 8.9, angewandt auf w und $-w$ folgt $w \equiv 0$. ■

Die eindeutige Lösbarkeit liefert die Existenz eines Lösungsoperators, also einer Halbgruppe.

Folgerung 8.11 *Die homogene Wärmeleitungsgleichung im Ganzraum*

$$\begin{aligned} \partial_t u - \Delta u &= 0 && \text{auf } \mathbb{R}^d \times (0, \infty), \\ u(\cdot, 0) &= u_0 && \text{auf } \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

erzeugt im Funktionenraum

$$X := C_b(\mathbb{R}^d) = \{v \mid v \in C(\mathbb{R}^d) \text{ und } \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} < \infty\}$$

eine Halbgruppe

$$S(t) : X \ni u_0 \mapsto u(t) \in X.$$

Es gelten

- i) $S(t) \circ S(s) = S(t + s)$ für $t, s > 0$,
- ii) $S(0) = id$,
- iii) die Abbildung $[0, \infty) \ni t \mapsto S(t)u_0 \in X$ ist stetig für alle $u_0 \in X$.

Teil II

**Numerik Partieller
Differentialgleichungen**

Kapitel 9

Finite–Differenzen–Verfahren für elliptische Gleichungen

nach [Sam84]

Die Modellbeispiele in diesem Abschnitt sind die Poisson–Gleichung

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \tag{9.1}$$

und die stationäre Diffusionsgleichung

$$-\nabla \cdot (A \nabla u) + qu = F \quad \text{in } \Omega, \tag{9.2}$$

wobei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ und die obigen Gleichungen noch mit geeigneten Randbedingungen abgeschlossen sind.

9.1 Grundlagen

Wir betrachten das Intervall $[0, 1]$ welches mittels eines äquidistanten Gitters zerlegt wird:

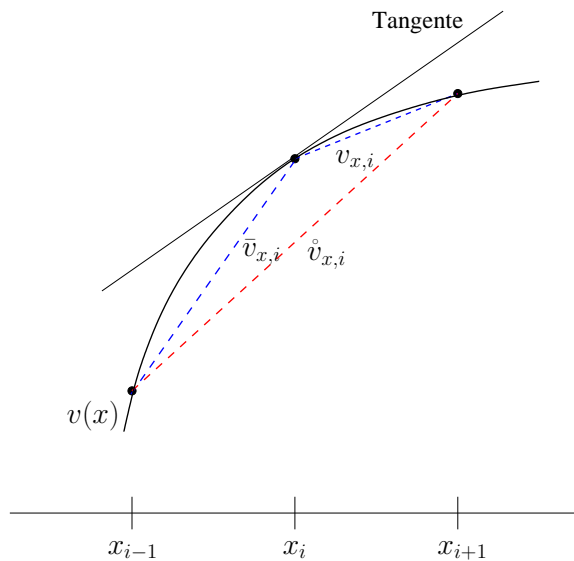
$$\begin{aligned} x_i &= ih, \quad i = 0, \dots, n, \quad h = 1/n, \\ \omega_h &= \{x_i : i = 0, \dots, n\} - \text{Gitter.} \end{aligned}$$

Definition 9.1 Ein Vektor $\mathbf{u}_h = (u_0, \dots, u_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$, der jedem Gitterpunkt einen Funktionswert zuordnet, heißt Gitterfunktion. \square

Definition 9.2 Sei $v(x)$ eine genügend glatte Funktion. Bezeichne $v_i = v(x_i)$, wobei x_i Knoten eines Gitters ist. Die folgenden Differenzenquotienten nennt man

$$\begin{aligned} v_{x,i} &= \frac{v_{i+1} - v_i}{h} - \text{Vorwärtsdifferenz,} \\ v_{\bar{x},i} &= \frac{v_i - v_{i-1}}{h} - \text{Rückwärtsdifferenz,} \\ v_{\dot{x},i} &= \frac{v_{i+1} - v_{i-1}}{2h} - \text{zentrale Differenz,} \\ v_{\ddot{x},i} &= \frac{v_{i+1} - 2v_i + v_{i-1}}{h^2} - \text{zweite Differenz.} \end{aligned}$$

\square



Es gelten (*Übungsaufgabe*)

$$v_{\hat{x},i} = \frac{1}{2}(v_{x,i} + v_{\bar{x},i}), \quad v_{\bar{x}x,i} = (v_{\bar{x},i})_{x,i}.$$

Aus der Taylor-Entwicklung für $v(x)$ an der Stelle x_i ergibt sich (*Übungsaufgabe*)

$$\begin{aligned} v_{x,i} &= v'(x_i) + \frac{1}{2}hv''(x_i) + \mathcal{O}(h^2), \\ v_{\bar{x},i} &= v'(x_i) - \frac{1}{2}hv''(x_i) + \mathcal{O}(h^2), \\ v_{\hat{x},i} &= v'(x_i) + \mathcal{O}(h^2), \\ v_{\bar{x}x,i} &= v''(x_i) + \mathcal{O}(h^2). \end{aligned}$$

Definition 9.3 Sei L ein Differentialoperator. Der Differenzenoperator $L_h : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ heißt mit L konsistent mit der Ordnung k , wenn

$$\max_{0 \leq i \leq n} |(Lu)(x_i) - (L_h u_h)_i| = \|(Lu)(x_i) - (L_h u_h)_i\|_{\infty, \omega_h} = \mathcal{O}(h^k)$$

gilt. □

Die Konsistenz ist ein Maß für die Approximationsgüte von L_h .

Beispiel 9.4 Die Differenzenoperatoren $v_{x,i}$, $v_{\bar{x},i}$, $v_{\hat{x},i}$ sind konsistent zu $L = \frac{d}{dx}$ mit der Ordnung 1,1 bzw. 2. Der Operator $v_{\bar{x}x,i}$ ist von zweiter Ordnung konsistent mit $L = \frac{d^2}{dx^2}$. □

Beispiel 9.5 Betrachtet wird der Differentialoperator

$$Lu = \frac{d}{dx} \left(k(x) \frac{du}{dx} \right),$$

wobei $k(x)$ stetig differenzierbar ist. Wir definieren den Differenzenoperator L_h wie folgt

$$\begin{aligned} (L_h u_h)_i &= (a u_{\bar{x},i})_{x,i} = \frac{1}{h} \left(a(x_{i+1}) u_{\bar{x},i}(x_{i+1}) - a(x_i) u_{\bar{x},i}(x_i) \right) \\ &= \frac{1}{h} \left(a_{i+1} \frac{u_{i+1} - u_i}{h} - a_i \frac{u_i - u_{i-1}}{h} \right), \end{aligned}$$

wobei a eine Gitterfunktion ist, die geeignet gewählt werden soll. Es folgt mit Produktregel bzw. mit Taylor-Entwicklung

$$\begin{aligned}(Lu)_i &= k'(x_i)(u')_i + k(x_i)(u'')_i, \\ (L_h u_h)_i &= \frac{a_{i+1} - a_i}{h}(u')_i + \frac{a_{i+1} + a_i}{2}(u'')_i + \frac{h(a_{i+1} - a_i)}{6}(u''')_i + \mathcal{O}(h^2).\end{aligned}$$

Für die Differenz ergibt sich

$$\begin{aligned}(Lu)_i - (L_h u_h)_i &= \left(k'(x_i) - \frac{a_{i+1} - a_i}{h}\right)(u')_i + \left(k(x_i) - \frac{a_{i+1} + a_i}{2}\right)(u'')_i \\ &\quad - \frac{h(a_{i+1} - a_i)}{6}(u''')_i + \mathcal{O}(h^2).\end{aligned}$$

Damit L_h von zweiter Ordnung mit L konsistent ist, müssen somit gelten

$$\frac{a_{i+1} - a_i}{h} = k'(x_i) + \mathcal{O}(h^2), \quad \frac{a_{i+1} + a_i}{2} = k(x_i) + \mathcal{O}(h^2).$$

Aus der ersten Forderung folgt $a_{i+1} - a_i = \mathcal{O}(h)$, womit der dritte Summand in der Fehlergleichung von Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$ wird. Mögliche Varianten sind (*Übungsaufgaben?*)

$$a_i = \frac{k_i + k_{i-1}}{2}, \quad a_i = k\left(x_i - \frac{h}{2}\right), \quad a_i = (k_i k_{i-1})^{1/2}.$$

Man beachte, die „natürliche“ Wahl $a_i = k_i$ garantiert nur Konsistenz von erster Ordnung, siehe die Taylorentwicklung für $v_{x,i}$. \square

9.2 Differenzenapproximation des Laplace-Operators in zwei Dimensionen

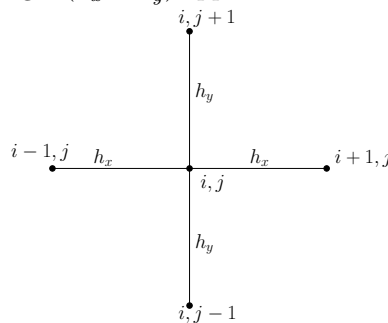
Der Laplace-Operator in zwei Dimensionen ist

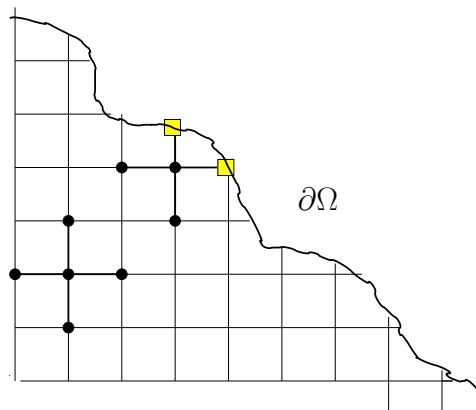
$$\Delta u(\mathbf{x}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \partial_x^2 u + \partial_y^2 u = u_{xx} + u_{yy}, \quad \mathbf{x} = (x, y).$$

Die einfachste Approximation nimmt für beide zweiten Ableitungen die zweite finite Differenzen. Das führt auf den sogenannten 5-Punkte-Stern und die Approximation

$$\Delta u \approx \Lambda u = u_{\bar{x}x} + u_{\bar{y}y} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h_y^2}.$$

Aus den Eigenschaften der zweiten finiten Differenz folgt sofort, dass Λu den Laplace-Operator mit der Ordnung $\mathcal{O}(h_x^2 + h_y^2)$ approximiert.





Bei dieser Approximation tritt ein Problem auf, wenn das Gebiet krummlinige Ränder besitzt. Die Approximation der zweiten Ableitung erfordert Funktionswerte in mindestens drei Punkten in jede Richtung

$$(x - h_x^-, y), (x, y), (x + h_x^+, y),$$

$$(x, y - h_y^-, y), (x, y), (x, y + h_y^+).$$

Eine mögliche Approximation ist

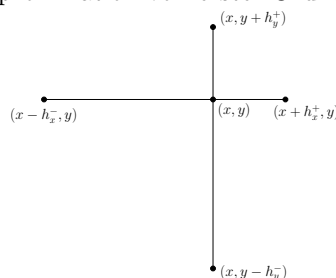
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\bar{h}_x} \left(\frac{u(x + h_x^+, y) - u(x, y)}{h_x^+} - \frac{u(x, y) - u(x - h_x^-, y)}{h_x^-} \right) \quad (9.3)$$

mit $\bar{h}_x = (h_x^+ + h_x^-)/2$. Der Approximationsfehler beträgt dabei (Taylor-Entwicklung)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\bar{h}_x} \left(\frac{u(x + h_x^+, y) - u(x, y)}{h_x^+} - \frac{u(x, y) - u(x - h_x^-, y)}{h_x^-} \right)$$

$$= -\frac{1}{3}(h_x^+ - h_x^-) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \mathcal{O}(\bar{h}_x^2).$$

Für $h_x^+ \neq h_x^-$ ist die Approximation von erster Ordnung.



Eine andere Möglichkeit ist

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \approx \frac{1}{\tilde{h}_x} \left(\frac{u(x + h_x^+, y) - u(x, y)}{h_x^+} - \frac{u(x, y) - u(x - h_x^-, y)}{h_x^-} \right)$$

mit $\tilde{h}_x = \max\{h_x^+, h_x^-\}$. Diese Approximation besitzt nur die Ordnung Null, d.h. es findet keine Approximation statt.

9.3 Das Dirichlet-Problem

Wir betrachten die Poisson-Gleichung, welche mit Dirichlet-Randbedingungen ausgestattet ist

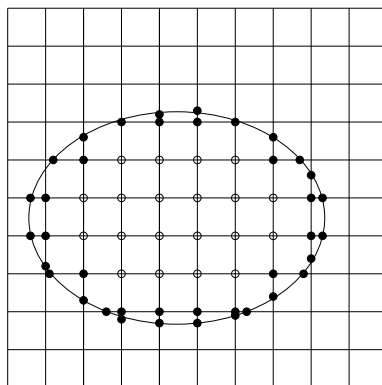
$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

$$u = g \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Wir zerlegen \mathbb{R}^2 in Rechtecke mit $x_i = ih_x, y_j = jh_y, h_x, h_y > 0, i, j \in \mathbb{Z}$.

Wir bezeichnen

$$\begin{aligned} w_h^\circ &= \{\circ\} && \text{echte innere Knoten, 5-Punkte-Stern ganz in } \Omega, \\ w_h^* &= \{*\} && \text{randnahe, innere Knoten,} \\ \gamma_h &= \{*\} && \text{Randknoten,} \\ \omega_h &= w_h^\circ \cup w_h^* && \text{innere Knoten,} \\ \omega_h \cup \gamma_h &&& \text{Gitter.} \end{aligned}$$



Die diskrete Aufgabe lautet nun

$$\begin{aligned} \Lambda u(\mathbf{x}) &= -\phi(\mathbf{x}) && \mathbf{x} \in w_h^\circ, \\ \Lambda^* u(\mathbf{x}) &= -\phi(\mathbf{x}) && \mathbf{x} \in w_h^*, \\ u(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}) && \mathbf{x} \in \gamma_h, \end{aligned}$$

wobei ϕ eine Approximation an f und Λ^* eine Approximation des Laplace-Operators für randnahe innere Knoten, zum Beispiel (9.3), sind. Die diskrete Aufgabe ist ein großes lineares Gleichungssystem. Die wichtigsten theoretischen Fragen bestehen in der Untersuchung der Eigenschaften der Gitterfunktion und der Konvergenz.

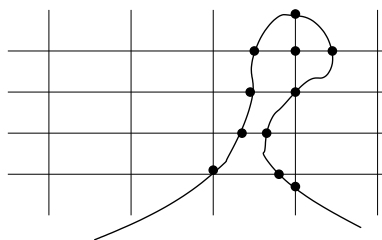
9.4 Das diskrete Maximum-Prinzip

Dieser Abschnitt behandelt die Übertragung von Ergebnissen aus Kapitel 7 auf Gitterfunktionen.

Wir betrachten eine Differenzgleichung in der Form

$$a(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in S(\mathbf{x})} b(\mathbf{x}, \mathbf{y})u(\mathbf{y}) + f(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega_h \cup \gamma_h,$$

wobei $S(\mathbf{x})$ eine Menge von Knoten darstellt, über die für den jeweiligen Knoten \mathbf{x} summiert werden muss (Schablone). Das Gitter ω_h wird zusammenhängend angenommen, d.h. für alle $\mathbf{x}_a, \mathbf{x}_e \in \omega_h$ existieren $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m \in \omega_h$ mit $\mathbf{x}_1 \in S(\mathbf{x}_a), \mathbf{x}_2 \in S(\mathbf{x}_1), \dots, \mathbf{x}_m \in S(\mathbf{x}_e)$. Die folgende Situation ist zum Beispiel nicht erlaubt:



Die Koeffizienten $a(\mathbf{x})$ und $b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ sollen folgende Bedingungen erfüllen:

$$\begin{aligned} a(\mathbf{x}) &> 0, \quad b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) > 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \omega_h, \forall \mathbf{y} \in S(\mathbf{x}), \\ a(\mathbf{x}) &= 1, \quad b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \gamma_h \text{ (Dirichlet-Randbedingung)}. \end{aligned}$$

Die Werte der Dirichlet-Randbedingungen sind mit in die Funktion $f(\mathbf{x})$ aufgenommen.

Beispiel 9.6 Die 5-Punkte-Stern-Approximation des Laplace-Operators in der Poisson-Gleichung für $\mathbf{x} = (x, y) \in \omega_h^\circ$ lässt sich wie folgt in dieser Form schreiben

$$\begin{aligned} \frac{2(h_x^2 + h_y^2)}{h_x^2 h_y^2} u(x, y) &= \left[\frac{1}{h_x^2} u(x + h_x, y) + \frac{1}{h_x^2} u(x - h_x, y) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{h_y^2} u(x, y + h_y) + \frac{1}{h_y^2} u(x, y - h_y) \right] + f(x, y). \end{aligned}$$

Man hat also $a(\mathbf{x}) = \frac{2(h_x^2 + h_y^2)}{h_x^2 h_y^2}$, $b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \{h_x^{-2}, h_y^{-2}\}$ und $S(\mathbf{x}) = \{(x - h_x, y), (x + h_x, y), (x, y - h_y), (x, y + h_y)\}$.

Für randnahe innere Punkte betrachten wir der Einfachheit halber nur den eindimensionalen Fall (9.3). Sei $x + h_x^+ \in \gamma_h$. Dann gilt

$$\frac{1}{\bar{h}_x} \left(\frac{1}{h_x^+} + \frac{1}{h_x^-} \right) u(x, y) = \frac{u(x - h_x^-, y)}{\bar{h}_x h_x^-} + \underbrace{\frac{u(x + h_x^+, y)}{\bar{h}_x h_x^+}}_{\rightarrow f(x)} + f(x).$$

Hier sind $a(x) = \frac{1}{h_x} \left(\frac{1}{h_x^+} + \frac{1}{h_x^-} \right)$, $b(x, y) = \frac{1}{h_x h_x^-}$ und $S(x) = \{(x - h_x^-, y)\}$. □

Das Schema kann in der folgenden Form geschrieben werden

$$d(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in S(\mathbf{x})} b(\mathbf{x}, \mathbf{y})(u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})) + f(\mathbf{x})$$

mit $d(\mathbf{x}) = a(\mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{y} \in S(\mathbf{x})} b(\mathbf{x}, \mathbf{y})$.

Beispiel 9.7 Für den 5-Punkte-Stern-Approximation des Laplace-Operators für $\mathbf{x} \in \omega_h^\circ$ gilt

$$d(\mathbf{x}) = \frac{2(h_x^2 + h_y^2)}{h_x^2 h_y^2} - \frac{2}{h_x^2} - \frac{2}{h_y^2} = 0.$$

Für randnahe Punkte gilt

$$d(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{\mathbf{y} \in S(\mathbf{x})} b(\mathbf{x}, \mathbf{y})}_{=a(\mathbf{x})} - \sum_{\mathbf{y} \in S(\mathbf{x}), \mathbf{y} \notin \gamma_h} b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{\mathbf{y} \in S(\mathbf{x}), \mathbf{y} \in \gamma_h} b(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Im eindimensionalen Fall hat man

$$d(x) = \frac{1}{\bar{h}_x h_x^+} = \frac{2}{h_x h_x^+ + h_x^+ h_x^+} \geq \frac{2}{h_x h_x + h_x h_x} = \frac{1}{h_x h_x}.$$

□

Lemma 9.8 Diskretes Maximum-Prinzip. Sei $u(\mathbf{x}) \neq \text{const}$ und $d(\mathbf{x}) \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \omega_h$. Dann folgt aus

$$Lu(\mathbf{x}) := d(\mathbf{x})u(\mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{y} \in S(\mathbf{x})} b(\mathbf{x}, \mathbf{y})(u(\mathbf{y}) - u(\mathbf{x})) \leq 0$$

(bzw. $Lu(\mathbf{x}) \geq 0$) auf ω_h , dass $u(\mathbf{x})$ seinen maximalen positiven (bzw. minimalen negativen) Wert nicht auf ω_h annehmen kann.

Beweis: Indirekter Beweis. Seien $Lu(\mathbf{x}) \leq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \omega_h$ sowie $u(\bar{\mathbf{x}}) = \max_{\mathbf{x} \in \omega_h} u(\mathbf{x}) > 0$. Die Idee besteht nun darin zu zeigen, dass unter diesen Voraussetzungen ein $\tilde{\mathbf{x}} \in \omega_h$ existiert mit $Lu(\tilde{\mathbf{x}}) > 0$.

Für $\bar{\mathbf{x}}$ gilt

$$Lu(\bar{\mathbf{x}}) = d(\bar{\mathbf{x}})u(\bar{\mathbf{x}}) - \sum_{\mathbf{y} \in S(\bar{\mathbf{x}})} \underbrace{b(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y})}_{>0} \underbrace{(u(\mathbf{y}) - u(\bar{\mathbf{x}}))}_{\leq 0 \text{ nach Definition von } \bar{\mathbf{x}}} \geq d(\bar{\mathbf{x}})u(\bar{\mathbf{x}}) \geq 0.$$

Somit gibt es nur die Möglichkeit $Lu(\bar{\mathbf{x}}) = 0$. Aus der obigen Abschätzung folgt insbesondere, dass dann $d(\bar{\mathbf{x}}) = 0$ sein muss. Die Summanden in der Summe sind alle nichtpositiv. Damit auch die Summe verschwindet, müssen alle Summanden Null sein. Da $b(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y})$ als positiv vorausgesetzt wurde, muss also auch

$$u(\mathbf{y}) = u(\bar{\mathbf{x}}) \quad \forall \mathbf{y} \in S(\bar{\mathbf{x}})$$

gelten. Da $u(\mathbf{x}) \neq \text{const}$ angenommen wurde, existiert ein $\hat{\mathbf{x}} \in \omega_h$ mit $u(\bar{\mathbf{x}}) > u(\hat{\mathbf{x}})$. Da das Gitter zusammenhängend ist, gibt es eine Verbindung $\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \hat{\mathbf{x}}$ mit

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &\in S(\bar{\mathbf{x}}) & u(\mathbf{x}_1) &= u(\bar{\mathbf{x}}) \\ \mathbf{x}_2 &\in S(\mathbf{x}_1) & u(\mathbf{x}_2) &= u(\mathbf{x}_1) = u(\bar{\mathbf{x}}) \\ &\dots & & \\ \hat{\mathbf{x}} &\in S(\mathbf{x}_m) & u(\mathbf{x}_m) &= u(\mathbf{x}_{m-1}) = \dots = u(\bar{\mathbf{x}}) > u(\hat{\mathbf{x}}). \end{aligned}$$

Für den letzten Gitterpunkt \mathbf{x}_m , in dem u den gleichen Funktionswert wie in $\bar{\mathbf{x}}$ annimmt, gilt

$$Lu(\mathbf{x}_m) \geq \underbrace{d(\mathbf{x}_m)}_{\geq 0} \underbrace{u(\mathbf{x}_m)}_{> 0} - \underbrace{b(\mathbf{x}_m, \hat{\mathbf{x}})}_{> 0} \underbrace{(u(\hat{\mathbf{x}}) - u(\mathbf{x}_m))}_{< 0} > 0.$$

Der Gitterpunkt \mathbf{x}_m ist also das gesuchte $\tilde{\mathbf{x}}$. ■

Folgerung 9.9 Seien $u(\mathbf{x}) \geq 0$, $\mathbf{x} \in \gamma_h$, und $Lu(\mathbf{x}) \geq 0$ auf ω_h . Dann ist die Gitterfunktion $u(\mathbf{x})$ nichtnegativ für alle $\mathbf{x} \in \omega_h \cup \gamma_h$.

Beweis: Angenommen, es existiert ein $\bar{\mathbf{x}} \in \omega_h$ mit $u(\bar{\mathbf{x}}) < 0$. Dann nimmt die Gitterfunktion ein negatives Minimum auf ω_h an. Das ist ein Widerspruch zum diskreten Maximum-Prinzip. ■

Folgerung 9.10 Die Gleichung $Lu(\mathbf{x}) = 0$ hat nur die triviale Lösung $u(\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \omega_h \cup \gamma_h$.

Man beachte, dass in der Definition von $Lu(\mathbf{x}) = 0$ auch die Randwerte enthalten sind.

Folgerung 9.11 Vergleichslemma. Seien

$$\begin{aligned} Lu(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \omega_h; & & u(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \gamma_h, \\ L\bar{u}(\mathbf{x}) &= \bar{f}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \omega_h; & & \bar{u}(\mathbf{x}) &= \bar{g}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \gamma_h, \end{aligned}$$

mit $|f(\mathbf{x})| \leq \bar{f}(\mathbf{x})$ und $|g(\mathbf{x})| \leq \bar{g}(\mathbf{x})$. Dann gilt $|u(\mathbf{x})| \leq \bar{u}(\mathbf{x})$ für alle $\mathbf{x} \in \omega_h \cup \gamma_h$.

Die restlichen Folgerungen in diesem Abschnitt werden wir beim Beweis der Stabilität benötigen. Es werden die homogene Aufgabe (rechte Seite verschwindet) sowie die Aufgabe mit homogenen Dirichlet–Randbedingungen untersucht.

Folgerung 9.12 *Für die Lösung der Aufgabe*

$$\begin{aligned} Lu(\mathbf{x}) &= 0 & \mathbf{x} \in \omega_h, \\ u(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \gamma_h, \end{aligned}$$

mit $d(\mathbf{x}) = 0$ für $\mathbf{x} \in \omega_h^\circ$ gilt

$$\|u\|_{l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)} \leq \|g\|_{l^\infty(\gamma_h)}.$$

Beweis: Betrachte die Aufgabe

$$\begin{aligned} L\bar{u}(\mathbf{x}) &= 0 & \mathbf{x} \in \omega_h, \\ \bar{u}(\mathbf{x}) &= \bar{g}(\mathbf{x}) = \text{const} = \|g\|_{l^\infty(\gamma_h)} & \mathbf{x} \in \gamma_h. \end{aligned}$$

Es gilt $\bar{u}(\mathbf{x}) = \|g\|_{l^\infty(\gamma_h)} = \text{const}$, da für die inneren Punkte, die nicht randnah sind, gilt

$$L\bar{u}(\mathbf{x}) = \underbrace{d(\mathbf{x})}_{=0} \bar{u}(\mathbf{x}) - \sum_{\mathbf{y} \in S(\mathbf{x})} b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \underbrace{(\bar{u}(\mathbf{y}) - \bar{u}(\mathbf{x}))}_{=0} = 0.$$

Für die inneren, randnahen Punkte hat man wegen $\bar{u}(\mathbf{x}) = \bar{u}(\mathbf{y})$

$$L\bar{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in S(\mathbf{x}), \mathbf{y} \in \gamma_h} b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bar{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in S(\mathbf{x}), \mathbf{y} \in \gamma_h} b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \bar{u}(\mathbf{y}),$$

was gerade die rechte Seite der Differenzgleichung ist, nachdem man die Randbedingung eingesetzt hat.

Die Funktion $\bar{u}(\mathbf{x})$ ist eine Majorante von $u(\mathbf{x})$ und mit Folgerung 9.11 folgt die Behauptung. ■

Folgerung 9.13 *Für die Lösung der Aufgabe*

$$\begin{aligned} Lu(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \omega_h, \\ u(\mathbf{x}) &= 0 & \mathbf{x} \in \gamma_h, \end{aligned}$$

mit $d(\mathbf{x}) > 0$ für $\mathbf{x} \in \omega_h$ gilt

$$\|u\|_{l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)} \leq \|D^{-1}f\|_{l^\infty(\omega_h)}$$

mit $D = \text{diag}(d(\mathbf{x}))$ für $\mathbf{x} \in \omega_h$.

Beweis: Wir betrachten die Funktion

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = |f(\mathbf{x})| \geq f(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \omega_h.$$

Die Lösung der Aufgabe

$$\begin{aligned} L\bar{u}(\mathbf{x}) &= \bar{f}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \omega_h, \\ \bar{u}(\mathbf{x}) &= 0 & \mathbf{x} \in \gamma_h, \end{aligned}$$

ist nichtnegativ (diskretes Maximum–Prinzip), d.h. $\bar{u}(\mathbf{x}) \geq 0$ für $\mathbf{x} \in \omega_h \cup \gamma_h$. Definiere $\bar{\mathbf{x}}$ durch

$$\bar{u}(\bar{\mathbf{x}}) = \|\bar{u}\|_{l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)}.$$

In $\bar{\mathbf{x}}$ gilt

$$L\bar{u}(\bar{\mathbf{x}}) = d(\bar{\mathbf{x}})\bar{u}(\bar{\mathbf{x}}) - \sum_{\mathbf{y} \in S(\bar{\mathbf{x}})} \underbrace{b(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y})}_{>0} \underbrace{(\bar{u}(\mathbf{y}) - \bar{u}(\bar{\mathbf{x}}))}_{\leq 0} = |f(\bar{\mathbf{x}})|$$

und damit

$$\bar{u}(\bar{\mathbf{x}}) \leq \frac{|f(\bar{\mathbf{x}})|}{d(\bar{\mathbf{x}})} \leq \max_{\mathbf{x} \in \omega_h} \frac{|f(\mathbf{x})|}{d(\mathbf{x})} = \|D^{-1}f\|_{l^\infty(\omega_h)}.$$

Da $u(\mathbf{x}) \leq \bar{u}(\bar{\mathbf{x}})$ für alle $\mathbf{x} \in \omega_h \cup \gamma_h$ nach Folgerung 9.11, folgt die Behauptung. ■

Folgerung 9.14 *Seien*

- $d(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \omega_h^\circ,$
- $d(\mathbf{x}) > 0, \mathbf{x} \in \omega_h^*,$
- $f(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \omega_h^\circ$ und
- $g(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \gamma_h.$

Dann gilt die Abschätzung

$$\|u\|_{l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)} \leq \|D^+f\|_{l^\infty(\omega_h)},$$

wobei $D^+ = \text{diag}(0, d(\mathbf{x})^{-1})$ ist. Dabei sind die Nullen für $\mathbf{x} \in \omega_h^\circ$ und $d(\mathbf{x})^{-1}$ für $\mathbf{x} \in \omega_h^*$.

Beweis: Seien $\bar{f}(\mathbf{x}) = |f(\mathbf{x})|, \mathbf{x} \in \omega_h; \bar{g}(\mathbf{x}) = 0, \mathbf{x} \in \gamma_h.$ Die Lösung $\bar{u}(\mathbf{x})$ ist nichtnegativ, $\bar{u}(\mathbf{x}) \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \omega_h \cup \gamma_h,$ siehe Beweis von Folgerung 9.13. Definiere $\bar{\mathbf{x}}$ durch

$$\bar{u}(\bar{\mathbf{x}}) = \|\bar{u}\|_{l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)}.$$

Man kann $\bar{\mathbf{x}} \in \omega_h^*$ wählen. Sei nämlich $\bar{\mathbf{x}} \in \omega_h^\circ,$ dann gilt

$$\underbrace{d(\bar{\mathbf{x}})}_{=0} \bar{u}(\bar{\mathbf{x}}) - \sum_{\mathbf{y} \in S(\bar{\mathbf{x}})} \underbrace{b(\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{y})}_{>0} \underbrace{(\bar{u}(\mathbf{y}) - \bar{u}(\bar{\mathbf{x}}))}_{\leq 0} = f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$$

d.h. $\bar{u}(\bar{\mathbf{x}}) = \bar{u}(\mathbf{y})$ für alle $\mathbf{y} \in S(\bar{\mathbf{x}}).$ Seien nun $\hat{\mathbf{x}} \in \omega_h^*$ und $\bar{\mathbf{x}}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m, \hat{\mathbf{x}}$ eine Verbindung mit $\mathbf{x}_i \notin \omega_h^*, i = 1, \dots, m.$ Für \mathbf{x}_m gilt analog

$$\bar{u}(\mathbf{x}_m) = \|\bar{u}\|_{l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)} = \bar{u}(\mathbf{y}) \quad \forall \mathbf{y} \in S(\mathbf{x}_m).$$

Daraus folgt insbesondere $\bar{u}(\hat{\mathbf{x}}) = \|\bar{u}\|_{l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)}$ und man kann $\bar{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}}$ wählen.

Da die Terme in der Summe für alle $\mathbf{x} \in \omega_h$ nichtnegativ sind, folgt schließlich mit Hilfe der Folgerung 9.11

$$\|u\|_{l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)} \leq \|\bar{u}\|_{l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)} \leq \frac{\bar{f}(\hat{\mathbf{x}})}{d(\hat{\mathbf{x}})} \leq \|D^+f\|_{l^\infty(\omega_h)}.$$

■

9.5 Stabilität und Konvergenz

Wir betrachten das Schema

$$\begin{aligned} \Lambda u(\mathbf{x}) &= -\phi(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \omega_h^\circ, \\ \Lambda^* u(\mathbf{x}) &= -\phi(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \omega_h^*, \\ u(\mathbf{x}) &= g(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \gamma_h, \end{aligned} \tag{9.4}$$

oder kurz

$$L_h u = f, \quad \mathbf{x} \in \omega_h, \quad u = g, \quad \mathbf{x} \in \gamma_h.$$

Die Lösung u kann man wie folgt aufspalten

$$u(\mathbf{x}) = u_1(\mathbf{x}) + u_2(\mathbf{x}),$$

mit

$$\begin{aligned} L_h u_1 &= f, \quad \mathbf{x} \in \omega_h, & u_1 &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_h \text{ (homogene Randbedingung)}, \\ L_h u_2 &= 0, \quad \mathbf{x} \in \omega_h, & u_2 &= g, \quad \mathbf{x} \in \gamma_h \text{ (homogene rechte Seite)}. \end{aligned}$$

Stabilität bezüglich der Randbedingung

Für die Funktion $u_2(\mathbf{x})$ gilt, Folgerung 9.12,

$$\|u_2\|_{l^\infty(\omega_h)} \leq \|g\|_{l^\infty(\gamma_h)}.$$

Stabilität bezüglich der rechten Seite

Die rechte Seite wird ebenfalls aufgespalten

$$f(\mathbf{x}) = f^\circ(\mathbf{x}) + f^*(\mathbf{x})$$

mit

$$f^\circ(\mathbf{x}) = \begin{cases} f(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \omega_h^\circ \\ 0 & \mathbf{x} \in \omega_h^* \end{cases}, \quad f^*(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}) - f^\circ(\mathbf{x}).$$

Wegen der Linearität der Gleichung zerlegt sich die Funktion $u_1(\mathbf{x})$ damit in

$$u_1(\mathbf{x}) = u_1^\circ(\mathbf{x}) + u_1^*(\mathbf{x})$$

mit

$$\begin{aligned} L_h u_1^\circ &= f^\circ, \quad \mathbf{x} \in \omega_h, & u_1^\circ &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_h, \\ L_h u_1^* &= f^*, \quad \mathbf{x} \in \omega_h, & u_1^* &= 0, \quad \mathbf{x} \in \gamma_h. \end{aligned}$$

Sei $B((0,0), R)$ ein Kreis mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius R , der so groß gewählt, dass $R \geq \|\mathbf{x}\|_2$ für alle $\mathbf{x} \in \Omega$. Wir betrachten die Funktion

$$\bar{u}(\mathbf{x}) = \alpha (R^2 - x^2 - y^2) \quad \text{mit } \alpha > 0,$$

welche nur nichtnegative Werte für $(x, y) \in \Omega$ annimmt. Für diese Funktion gelten

$$\begin{aligned} \Lambda \bar{u}(\mathbf{x}) &= -\alpha \Lambda(x^2 + y^2 - R^2) \\ &= -\alpha \left(\frac{(x + h_x)^2 - 2x^2 + (x - h_x)^2}{h_x^2} + \frac{(y + h_y)^2 - 2y^2 + (y - h_y)^2}{h_y^2} \right) \\ &= -4\alpha =: -\bar{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega_h^\circ, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \Lambda^* \bar{u}(\mathbf{x}) &= -\alpha \left[\frac{1}{\bar{h}_x} \left(\frac{(x + h_x^+)^2 - x^2}{h_x^+} - \frac{x^2 - (x - h_x^-)^2}{h_x^-} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\bar{h}_y} \left(\frac{(y + h_y^+)^2 - y^2}{h_y^+} - \frac{y^2 - (y - h_y^-)^2}{h_y^-} \right) \right] \\ &= -\alpha \left(\frac{h_x^+ + h_x^-}{\bar{h}_x} + \frac{h_y^+ + h_y^-}{\bar{h}_y} \right) =: -\bar{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \omega_h^*. \end{aligned}$$

Somit hat die Aufgabe

$$\begin{aligned} L_h \bar{u}(\mathbf{x}) &= \bar{f}(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \omega_h, \\ \bar{u}(\mathbf{x}) &= \alpha (R^2 - x^2 - y^2) > 0 & \mathbf{x} \in \gamma_h, \end{aligned}$$

gerade die Lösung $\bar{u}(\mathbf{x})$. Es gilt $\bar{u}(\mathbf{x}) \geq 0$ für alle $\mathbf{x} \in \gamma_h$. Für $\alpha = \frac{1}{4} \|f^\circ\|_{l^\infty(\omega_h)}$ gilt

$$\begin{aligned} \bar{f}(\mathbf{x}) &= 4\alpha = \|f^\circ\|_{l^\infty(\omega_h)} \geq |f^\circ(\mathbf{x})|, & \mathbf{x} \in \omega_h^\circ, \\ \bar{f}(\mathbf{x}) &\geq 0 = |f^\circ(\mathbf{x})| & \mathbf{x} \in \omega_h^*. \end{aligned}$$

Damit haben wir eine Majorante konstruiert und es folgt, Folgerung 9.11 (Vergleichslemma),

$$\|u_1^\circ\|_{l^\infty(\omega_h)} \leq \|\bar{u}\|_{l^\infty(\omega_h)} \leq \alpha R^2 = \frac{R^2}{4} \|f^\circ\|_{l^\infty(\omega_h)}.$$

Die letzte Abschätzung kommt daher, dass $(0, 0)$ nicht in Ω oder in ω_h liegen muss.

Für die Funktion $u_1^*(\mathbf{x})$ benutzen wir die Folgerung 9.14. Für $\mathbf{x} \in \omega_h^\circ$ ist $d(\mathbf{x}) = 0$, siehe Beispiel 9.7. Für $\mathbf{x} \in \omega_h^*$ ist

$$d(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{y} \in S(\mathbf{x}), \mathbf{y} \in \gamma_h} b(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq \frac{1}{h^2}$$

mit $h = \max\{h_x, h_y\}$, da die Summanden die Form

$$\frac{1}{\bar{h}_x h_x^+}, \frac{1}{\bar{h}_x h_x^-}, \frac{1}{\bar{h}_y h_y^+}, \frac{1}{\bar{h}_y h_y^-}$$

besitzen, Beispiel 9.7. Damit erhalten wir

$$\|u_1^*\|_{l^\infty(\omega_h)} \leq \|D^+ f^*\|_{l^\infty(\omega_h)} \leq h^2 \|f^*\|_{l^\infty(\omega_h)}.$$

Zusammenfassung der Abschätzungen für $u_1^\circ(\mathbf{x})$, $u_1^*(\mathbf{x})$ und $u_2(\mathbf{x})$ liefert die Stabilität in der $l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)$ -Norm bezüglich der Randbedingung und der rechten Seite.

Lemma 9.15 *Die diskrete Lösung der Dirichlet-Aufgabe erfüllt*

$$\|u\|_{l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)} \leq \|g\|_{l^\infty(\gamma_h)} + \frac{R^2}{4} \|\phi\|_{l^\infty(\omega_h^\circ)} + h^2 \|\phi\|_{l^\infty(\omega_h^*)}$$

mit $R \geq \|\mathbf{x}\|_2$ für alle $\mathbf{x} \in \Omega$ und $h = \max\{h_x, h_y\}$.

Konvergenz

Satz 9.16 *Seien u die Lösung der Poisson-Gleichung und u_h ihre Finite-Differenzen-Approximation (9.4). Dann gilt*

$$\|(u - u_h)\|_{l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)} \leq Ch^2$$

mit $h = \max\{h_x, h_y\}$.

Beweis: Für den Fehler $e_{ij} = u(x_i, y_j) - u^h(x_i, y_j)$ gilt die Gleichung

$$\begin{aligned} \Lambda e(\mathbf{x}) &= -\psi(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \omega_h^\circ, & \psi(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(h^2), \\ \Lambda^* e(\mathbf{x}) &= -\psi(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \omega_h^*, & \psi(\mathbf{x}) = \mathcal{O}(1), \\ e(\mathbf{x}) &= 0 & \mathbf{x} \in \gamma_h, \end{aligned}$$

wobei $\psi(\mathbf{x})$ der Approximationsfehler, Abschnitt 9.2, ist. Mit der Stabilitätsabschätzung folgt

$$\|e\|_{l^\infty(\omega_h \cup \gamma_h)} \leq \frac{R^2}{4} \|\psi\|_{l^\infty(\omega_h^\circ)} + h^2 \|\psi\|_{l^\infty(\omega_h^*)} = \mathcal{O}(h^2).$$

■

9.6 Das Dirichlet–Problem im Rechteck

Wir betrachten jetzt den Spezialfall, dass $\Omega = (0, l_x) \times (0, l_y)$. Insbesondere wird nun keine Modifikation der Differenzensterne in Randnähe mehr nötig sein. Die Konvergenz des der Finite–Differenzen–Approximation ist durch den vorangegangenen Abschnitt geklärt. Bei der Berechnung der Finite–Differenzen–Lösung muss man ein großes lineares Gleichungssystem $Au = f$ lösen. In diesem Abschnitt wird ein Weg aufgezeigt, der die Lösung dieses Gleichungssystem im Falle eines Rechteckgebietes in einer fast optimalen Art und Weise erlaubt.

Die stetige Aufgabe lautet

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega = (0, l_x) \times (0, l_y), \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

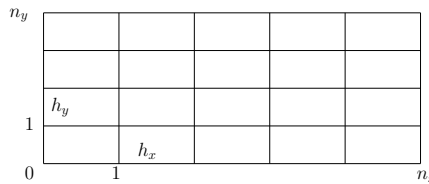
und die diskrete Aufgabe

$$\begin{aligned} \Lambda u &= \phi & \mathbf{x} \in \omega_h, \\ u &= g & \mathbf{x} \in \gamma_h, \end{aligned}$$

wobei der diskrete Laplace–Operator die Form

$$\Lambda u = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h_x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h_y^2} =: \Lambda_x u + \Lambda_y u$$

mit $h_x = l_x/n_x, h_y = l_y/n_y, i = 0, \dots, n_x, j = 0, \dots, n_y$, besitzt.



Wir betrachten das folgende Eigenwertproblem

$$\begin{aligned} \Lambda v + \lambda v &= 0 & \mathbf{x} \in \omega_h, \\ v &= 0 & \mathbf{x} \in \gamma_h, \end{aligned}$$

und suchen die Lösung in der Produktform (Separationsansatz)

$$v_{ij}^{(\mathbf{k})} = v_i^{(k_x),x} v_j^{(k_y),y}, \quad \mathbf{k} = (k_x, k_y)^T.$$

Es gilt

$$\Lambda v_{ij}^{(\mathbf{k})} = \Lambda_x v_i^{(k_x),x} v_j^{(k_y),y} + v_i^{(k_x),x} \Lambda_y v_j^{(k_y),y} = -\lambda_{\mathbf{k}} v_i^{(k_x),x} v_j^{(k_y),y}$$

mit

$$v_0^{(k_x),x} = v_{n_x}^{(k_x),x} = v_0^{(k_y),y} = v_{n_y}^{(k_y),y} = 0.$$

Damit kann man das Eigenwertproblem separieren

$$\frac{\Lambda_x v_i^{(k_x),x}}{v_i^{(k_x),x}} + \lambda_{k_x}^{(x)} = -\frac{\Lambda_y v_j^{(k_y),y}}{v_j^{(k_y),y}} - \lambda_{k_y}^{(y)}$$

mit $\lambda_{\mathbf{k}} = \lambda_{k_x}^{(x)} + \lambda_{k_y}^{(y)}$. Beide Seiten müssen konstant sein, da die eine nur von i (d.h. von x) abhängt und die andere nur von j (d.h. von y). Die Zerlegung von $\lambda_{\mathbf{k}}$ sei so gewählt, dass die Konstante gleich Null ist. Man erhält

$$\Lambda_x v_i^{(k_x),x} + \lambda_{k_x}^{(x)} v_i^{(k_x),x} = 0, \quad \Lambda_y v_j^{(k_y),y} + \lambda_{k_y}^{(y)} v_j^{(k_y),y} = 0.$$

Die Lösung dieser Eigenwertprobleme ist bekannt:

$$v_i^{(k_x),x} = \sqrt{\frac{2}{l_x}} \sin\left(\frac{k_x \pi i}{n_x}\right), \quad \lambda_{k_x}^{(x)} = \frac{4}{h_x^2} \sin^2\left(\frac{k_x \pi}{2n_x}\right),$$

$$i = 0, \dots, n_x, \quad k_x = 1, \dots, n_x - 1,$$

$$v_j^{(k_y),y} = \sqrt{\frac{2}{l_y}} \sin\left(\frac{k_y \pi j}{n_y}\right), \quad \lambda_{k_y}^{(y)} = \frac{4}{h_y^2} \sin^2\left(\frac{k_y \pi}{2n_y}\right),$$

$$j = 0, \dots, n_y, \quad k_y = 1, \dots, n_y - 1.$$

Die Lösung des gesamten Eigenwertproblems ist dann

$$v_{ij}^{(\mathbf{k})} = \frac{2}{\sqrt{l_x l_y}} \sin\left(\frac{k_x \pi i}{n_x}\right) \sin\left(\frac{k_y \pi j}{n_y}\right), \quad \lambda_{\mathbf{k}} = \frac{4}{h_x^2} \sin^2\left(\frac{k_x \pi}{2n_x}\right) + \frac{4}{h_y^2} \sin^2\left(\frac{k_y \pi}{2n_y}\right).$$

Bezüglich des Skalarproduktes

$$\langle u, v \rangle = h_x h_y \sum_{\mathbf{x} \in \omega_h \cup \gamma_h} u(\mathbf{x}) v(\mathbf{x})$$

sind die Eigenvektoren orthonormal

$$\langle v^{(\mathbf{k})}, v^{(\mathbf{m})} \rangle = \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{m}}.$$

Das obige Differenzschema ist äquivalent zu einem Gleichungssystem $Au = f$. Die Knoten nennt man lexikographisch numeriert, wenn der Knoten (i_1, j_1) vor dem Knoten (i_2, j_2) kommt, falls für die entsprechenden Koordinaten gilt

$$y_1 < y_2 \quad \text{oder} \quad (y_1 = y_2) \wedge (x_1 < x_2).$$

Bei lexikographischer Numerierung der Knoten, erhält man für die inneren Knoten ein System der Gestalt

$$A = \text{BlockTriDiag}(C, B, C) \in \mathbb{R}^{(n_x-1)(n_y-1) \times (n_x-1)(n_y-1)},$$

$$B = \text{TriDiag}\left(-\frac{1}{h_x^2}, \frac{2}{h_x^2} + \frac{2}{h_y^2}, -\frac{1}{h_x^2}\right) \in \mathbb{R}^{(n_x-1) \times (n_x-1)},$$

$$C = \text{Diag}\left(-\frac{1}{h_y^2}\right) \in \mathbb{R}^{(n_x-1) \times (n_x-1)},$$

$$f = \begin{cases} \phi(\mathbf{x}) & \mathbf{x} \in \omega_h^\circ, \\ \phi(\mathbf{x}) + \frac{g(x \pm h_x, y)}{h_x^2} & i \in \{1, n_x - 1\}; j \notin \{1, n_y - 1\}, \\ \phi(\mathbf{x}) + \frac{g(x, y \pm h_y)}{h_y^2} & i \notin \{1, n_x - 1\}; j \in \{1, n_y - 1\}, \\ \phi(\mathbf{x}) + \frac{g(x \pm h_x, y)}{h_x^2} + \frac{g(x, y \pm h_y)}{h_y^2} & i \in \{1, n_x - 1\}; j \in \{1, n_y - 1\}. \end{cases}$$

Die letzte Zeile ist für die inneren Knoten, die in den Eckpunkten von ω_h° liegen. Bei dieser Herangehensweise sind die bekannten Randwerte bereits eingesetzt und tauchen nun auf der rechten Seite auf. Die Matrizen B, C weisen für die Knoten, die einen Nachbarn auf dem Rand besitzen, auch noch Modifikationen auf.

Das Gleichungssystem ist:

1. *hoch dimensioniert*, $N = (n_x - 1)(n_y - 1) \sim 10^3 \dots 10^7$,
2. *schwach besetzt*, pro Zeile/Spalte gibt es nur 3,4 oder 5, Nichtnulleinträge,
3. *symmetrisch*, damit sind alle Eigenwerte reell,

4. *positiv definit*, weil alle Eigenwerte positiv sind. Man hat

$$\begin{aligned}\lambda_{\min} &= \lambda_{(1,1)} \sim \pi^2 \left(\frac{1}{l_x^2} + \frac{1}{l_y^2} \right) = \mathcal{O}(1), \\ \lambda_{\max} &= \lambda_{(n_x-1, n_y-1)} \sim \pi^2 \left(\frac{1}{h_x^2} + \frac{1}{h_y^2} \right) = \mathcal{O}(h^{-2})\end{aligned}$$

mit $h = \max\{h_x, h_y\}$,

5. *schlecht konditioniert*. Für die Spektralkonditionszahl einer symmetrisch und positiv definiten Matrix gilt

$$\kappa_2(A) = \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = \mathcal{O}(h^{-2}).$$

Da die Matrix sehr groß ist, bieten sich iterative Löser an. Die Anzahl der Iterationen vieler iterativer Löser hängt von der Konditionszahl ab. Der wesentliche Kostenfaktor bei iterativen Lösern sind Matrix-Vektor-Multiplikationen (oft eine pro Iteration). Der Aufwand von Matrix-Vektor-Multiplikationen für schwach besetzte Matrizen ist proportional zur Anzahl der Unbekannten.

- (gedämpftes) Jacobi-Verfahren, SOR: Anzahl der Iterationen verhält sich proportional zu $\kappa_2(A)$. Verfeinert man das Gitter einmal $h \rightarrow h/2$, dann erhöht sich die Anzahl der Unbekannten um den Faktor 4 (in zwei Dimensionen) und auch die Anzahl der Iterationen erhöht sich um den Faktor 4. Damit steigen die Gesamtkosten um den Faktor 16.
 - (vorkonditioniertes) Verfahren der konjugierten Gradienten: die Anzahl der Iterationen ist proportional zu $\sqrt{\kappa_2(A)}$. Damit steigen die Kosten bei jeder Verfeinerung um den Faktor 8.
 - Mehrgitterverfahren: Hier ist die Anzahl der Iterationen konstant. Die Gesamtkosten sind damit proportional zur Anzahl der Unbekannten. Das ist optimal, da beim Lösen jede Unbekannte mindestens einmal „angefasst“ werden muss.
6. *besonders strukturiert*. Eine direkte Lösungsmethode basiert auf der Benutzung der schnellen Fourier-Transformation (fast Fourier transform, FFT). Setze

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} v^{(\mathbf{k})}(\mathbf{x})$$

mit den Fourier-Koeffizienten

$$f_{\mathbf{k}} = \langle f, v^{(\mathbf{k})} \rangle = \frac{2}{h_x h_y} \sqrt{l_x l_y} \sum_{i,j} f_{ij} \sin\left(\frac{k_x \pi i}{n_x}\right) \sin\left(\frac{k_y \pi j}{n_y}\right).$$

Die Lösung $u(\mathbf{x})$ sucht man in der Form

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} v^{(\mathbf{k})}(\mathbf{x})$$

mit unbekanntem Koeffizienten $u_{\mathbf{k}}$. Damit erhält man

$$Au = \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} A v^{(\mathbf{k})} = \sum_{\mathbf{k}} u_{\mathbf{k}} \lambda_{\mathbf{k}} v^{(\mathbf{k})}.$$

Da die Eigenfunktionen eine Basis des Raumes der Gitterfunktionen bilden, liefert der Koeffizientenvergleich mit der rechten Seite $u_{\mathbf{k}} = f_{\mathbf{k}}/\lambda_{\mathbf{k}}$ oder

$$u_{ij} = \frac{2}{h_x h_y} \sqrt{l_x l_y} \sum_{k_x, k_y} \frac{f_{ij}}{\lambda_{\mathbf{k}}} \sin\left(\frac{k_x \pi i}{n_x}\right) \sin\left(\frac{k_y \pi j}{n_y}\right).$$

Der numerische Aufwand beträgt

$$\mathcal{O}(n_x n_y \log_2 n_x + n_x n_y \log_2 n_y) = \mathcal{O}(N \log_2 N), \quad N = (n_x - 1)(n_y - 1),$$

Operationen und er ist damit fast optimal.

Kapitel 10

Finite–Elemente

10.1 Das Ritzsche Verfahren

Sei V ein Hilbert–Raum mit dem Skalarprodukt $a(\cdot, \cdot)$. Wir betrachten das Problem

$$\min_{v \in V} F(v) = \min_{v \in V} \left(\frac{1}{2} a(v, v) - f(v) \right),$$

wobei $f(\cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$ ein beschränktes lineares Funktional ist. Wie bereits bewiesen ist, besitzt das Variationsproblem eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in V$, die außerdem die Gleichung

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V \tag{10.1}$$

löst, Satz 5.4 (Rieszscher Darstellungssatz).

Um die Lösung der obigen Probleme mit einem numerischen Verfahren zu approximieren, setzen wir voraus, dass V ein separabler Hilbert–Raum ist, d.h. V besitzt eine abzählbare Basis. Dann gibt es endlich–dimensionale Teilräume $V_1, V_2, \dots \subset V$ mit $\dim V_k = k$, die folgende Eigenschaft besitzen: zu jedem $u \in V$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $K \in \mathbb{N}$ und ein $u_k \in V_k$ mit

$$\|u - u_k\|_V \leq \varepsilon \quad \forall k \geq K.$$

Es wird dabei nicht verlangt, dass es eine Inklusion der Form $V_k \subset V_{k+1}$ gibt.

Die Ritz–Approximation von (10.1) ist wie folgt definiert. Gesucht ist $u_k \in V_k$ mit

$$a(u_k, v_k) = f(v_k) \quad \forall v_k \in V_k. \tag{10.2}$$

Da endlich–dimensionale Teilräume von Hilbert–Räumen wiederum Hilbert–Räume sind, besitzt nach dem Rieszschen Darstellungssatz auch die Gleichung der Ritz–Approximation eine eindeutige Lösung, die ebenso ein Minimierungsproblem im Raum V_k löst. Aus der Differenz der Gleichungen (10.1) und (10.2) erhält man die Orthogonalitätsrelation

$$a(u - u_k, v_k) = 0 \quad \forall v_k \in V_k. \tag{10.3}$$

Das besagt, dass der Fehler $u - u_k$ senkrecht zum Raum V_k ist: $u - u_k \perp V_k$. Demnach ist u_k die orthogonale Projektion von u in den Raum V_k bezüglich des Skalarproduktes von V . Das heißt, u_k ist die Bestapproximierende von u in V_k

$$\|u - u_k\|_V = \inf_{v_k \in V_k} \|u - v_k\|_V.$$

Zum Beweis nutzt man die Orthogonalität (10.3) und die Cauchy–Schwarz–Ungleichung. Sei $w_k \in V_k$ beliebig, dann ist

$$\begin{aligned}\|u - u_k\|_V^2 &= a(u - u_k, u - u_k) = a(u - u_k, u - \underbrace{(u_k - w_k)}_{v_k}) = a(u - u_k, u - v_k) \\ &\leq \|u - u_k\|_V \|u - v_k\|_V.\end{aligned}$$

Da $w_k \in V_k$ beliebig ist, ist auch $v_k \in V_k$ beliebig.

Mit der Bestapproximationseigenschaft erhält man

$$\|u - u_k\|_V = \inf_{v_k \in V_k} \|u - v_k\|_V \leq \varepsilon,$$

woraus schließlich die Konvergenz der Ritz–Approximation $u_k \rightarrow u$ für $k \rightarrow \infty$ folgt.

Für die Berechnung der u_k kann man eine beliebige Basis $\{\phi_i\}_{i=1}^k$ von V_k verwenden. Zunächst gilt, dass die Gleichung der Ritz–Approximation (10.2) genau dann für alle $v_k \in V_k$ erfüllt ist, wenn sie für jede Basisfunktion ϕ_i erfüllt ist. Das folgt aus der Linearität der Gleichung bezüglich der Testfunktion und daraus, dass man jede Funktion $v_k \in V_k$ als Linearkombination der Basisfunktionen darstellen kann. Man setzt auch die Lösung als Linearkombination der Basisfunktionen an

$$u_k = \sum_{j=1}^k u^j \phi_j$$

mit unbekanntem Koeffizienten u^j und erhält, indem man als Testfunktionen jetzt die Basisfunktionen nutzt,

$$\sum_{j=1}^k a(u^j \phi_j, \phi_i) = f(\phi_i), \quad i = 1, \dots, k.$$

Das ist äquivalent zu einem Gleichungssystem $Au = b$, wobei

$$A = (a_{ij}) = a(\phi_j, \phi_i)$$

Steifigkeitsmatrix genannt wird. Man beachte die unterschiedliche Reihenfolge der Indizes bei den Matrixeinträgen und beim Skalarprodukt. Die rechte Seite ist ein Vektor der Länge k mit den Einträgen $b_i = f(\phi_i)$.

Mit der eindeutigen Zuordnung zwischen dem Koordinatenvektor $(u^1, \dots, u^k)^T$ und dem Element $v_k = \sum_{i=1}^k u^i \phi_i$ lässt sich zeigen, dass die Matrix A symmetrisch und positiv definit ist:

$$\begin{aligned}A &= A^T \Leftrightarrow a(v, w) = a(w, v) \quad \forall v, w \in V_k, \\ x^T Ax &> 0 \text{ für } x \neq 0 \Leftrightarrow a(v, v) > 0 \quad \forall v \in V_k, v \neq 0.\end{aligned}$$

Übungsaufgabe

Im nichtvariationellen Fall, also wenn $b(\cdot, \cdot)$ unsymmetrisch, aber äquivalent zum Skalarprodukt $a(\cdot, \cdot)$ ist, kann man: Finde $u \in V$ mit

$$b(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V \tag{10.4}$$

auch mit dem Ritzschen Verfahren approximieren. Das diskrete Problem lautet: Finde $u_k \in V_k$, so dass

$$b(u_k, v_k) = f(v_k) \quad \forall v_k \in V_k. \tag{10.5}$$

Die diskrete Lösung existiert eindeutig nach dem Satz 5.7 (Lax–Milgram). Sie ist jedoch keine orthogonale Projektion in V_k mehr. Trotzdem kann man die gleiche Fehlerabschätzung wie im variationellen Fall beweisen. Aus der Differenz der stetigen Gleichung (10.4) und der diskreten Gleichung (10.5)

$$b(u - u_k, v_k) = 0 \quad \forall v_k \in V_k$$

und

$$m \|v\|_V^2 \leq b(v, v) \quad \text{und} \quad |b(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V$$

folgt

$$\begin{aligned} \|u - u_k\|_V^2 &\leq \frac{1}{m} b(u - u_k, u - u_k) = \frac{1}{m} b(u - u_k, u - v_k) \\ &\leq \frac{M}{m} \|u - u_k\|_V \|u - v_k\|_V. \end{aligned}$$

Damit hat man das sogenannte Lemma von Cea bewiesen

$$\|u - u_k\|_V \leq \frac{M}{m} \inf_{v_k \in V_k} \|u - v_k\|_V. \quad (10.6)$$

Im unsymmetrischen Fall wird dieses Verfahren Galerkin–Methode genannt. Das lineare Gleichungssystem wird genauso wie im symmetrischen Fall hergeleitet. Die Systemmatrix ist immer noch positiv definit, aber nicht mehr symmetrisch.

Der wichtigste Punkt beim Ritzschen Verfahren und bei der Galerkin–Methode ist die Wahl der Räume V_k , oder genauer, die Wahl von geeigneten Basen $\{\phi_i\}_{i=1}^k$, die einen Raum V_k aufspannen. Vom numerischen Standpunkt aus sollten die Elemente a_{ij} der Steifigkeitsmatrix schnell zu berechnen sein und die Matrix A sollte nur schwach besetzt sein. Das wird der Schwerpunkt der restlichen Vorlesung sein.

10.2 Finite–Element–Räume

Im folgenden sei K ein abgeschlossener, beschränkter Polyeder im \mathbb{R}^d , $d \in \{2, 3\}$. Der Rand ∂K von K bestehe aus m –dimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten (Punkte, Geradenstücke, Ebenenstücke), $0 \leq m \leq d-1$, die als m –Seitenflächen bezeichnet werden. Die $(d-1)$ –Seitenflächen heißen einfach Seiten, die 0–Seitenflächen sind die Eckpunkte und die 1–Seitenflächen die Kanten.

Sei $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Auf K sei ein endlich–dimensionaler Raum $P(K) \subset C^s(K)$ definiert mit $\dim P(K) = N_K$. Im allgemeinen wird $P(K)$ ein Polynomraum sein.

Beispiel 10.1 Sei $P(K) = P_1(K)$, der Raum aus linearen Polynomen

$$a_0 + \sum_{i=1}^d a_i x_i.$$

Man hat $d+1$ unbekannte Koeffizienten a_i , $i = 0, \dots, d$, sodass $\dim P_1(K) = d+1$.
□

Weiter seien lineare und stetige Funktionale $\Phi_{K,1}, \dots, \Phi_{K,N_K} : C^s(K) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, die linear unabhängig sind.

Beispiel 10.2 Es gibt unterschiedliche Typen von linearen und stetigen Funktionalen, die im Rahmen von FEM genutzt werden:

- Punktauswertung: $\Phi(v) = v(\mathbf{x})$,
- Auswertung der ersten Ableitung: $\Phi(v) = \partial_i v(\mathbf{x})$,

- Auswertung der Normalableitung auf einer Seite E von K : $\Phi(v) = \nabla v(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$, \mathbf{n} ist die Einheitsnormale an E , die nach außen zeigt,
- Integralmittelwerte über K : $\Phi(v) = \frac{1}{|K|} \int_K v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$,
- Integralmittelwerte über Seitenflächen: $\Phi(v) = \frac{1}{|E|} \int_E v(\mathbf{s}) \, ds$.

□

Der Parameter s muss so gewählt sein, dass die Funktionale $\Phi_{K,1}, \dots, \Phi_{K,N_K}$ stetig sind. Wenn beispielsweise ein Funktional die Auswertung einer partiellen Ableitung oder der Normalableitung erfordert, dann muss mindestens $s = 1$ gewählt werden. Für die anderen Funktionale reicht $s = 0$.

Die nächste Forderung ist die Unisolvenz des Raumes $P(K)$ bezüglich der Funktionale $\Phi_{K,1}, \dots, \Phi_{K,N_K}$.

Definition 10.3 Der Raum $P(K)$ heißt unisolvent bezüglich der Funktionale $\Phi_{K,1}, \dots, \Phi_{K,N_K}$ falls es zu jedem $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{N_K}$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{N_K})^T$ genau ein $p \in P(K)$ mit

$$\Phi_{K,i}(p) = a_i, \quad 1 \leq i \leq N_K$$

gibt

□

Für jeden Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{N_K}$ gibt es genau ein Urbild in $P(K)$, so dass das Bild des i -ten Funktionals gleich der i -ten Komponente des Bildvektors ist.

Wählt man insbesondere die Einheitsvektoren für \mathbf{a} , so folgt aus der Unisolvenz die Existenz von $\{\phi_{K,i}\}_{i=1}^{N_K}$ mit $\phi_{K,i} \in P(K)$ und

$$\Phi_{K,i}(\phi_{K,j}) = \delta_{ij}.$$

Damit bilden die $\{\phi_{K,i}\}_{i=1}^{N_K}$ eine Basis von $P(K)$. Im Rahmen der FEM spricht man von einer lokalen Basis.

Ist eine beliebige Basis $\{p_i\}_{i=1}^{N_K}$ von $P(K)$ bekannt, kann die lokale Basis durch das Lösen eines Gleichungssystems bestimmt werden. Dazu setzt man

$$\phi_{K,j} = \sum_{k=1}^{N_K} c_{jk} p_k, \quad c_{jk} \in \mathbb{R},$$

und löst

$$\Phi_{K,i}(\phi_{K,j}) = \sum_{k=1}^{N_K} c_{jk} a_{ik} = \delta_{ij}, \quad i = 1, \dots, N_K, \quad a_{ik} = \Phi_{K,i}(p_k).$$

Auf Grund der Unisolvenz ist die Matrix $A = (a_{ik})$ regulär und die Koeffizienten c_{jk} sind eindeutig bestimmt.

Beispiel 10.4 Wir betrachten das Referenzdreieck \hat{K} mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$. Ein linearer Raum auf \hat{K} wird durch die Funktionen

$$1, \hat{x}, \hat{y}$$

aufgespannt. Nehmen wir nun als Funktionale die Auswertung der Funktion in den Eckpunkten des Dreiecks, so sind die obigen Funktionen keine lokale Basis, weil die Funktion 1 in keinem Eckpunkt verschwindet.

Betrachten wir zunächst den Punkt $(0,0)$. Die lineare Basisfunktion

$$a\hat{x} + b\hat{y} + c,$$

die in $(0, 0)$ den Wert 1 annehmen und in den anderen Eckpunkten verschwinden soll, muss folgende Gleichungen erfüllen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist $a = -1, b = -1, c = 1$. Die anderen lokalen Basisfunktionen sind gerade \hat{x} und \hat{y} , womit die lokale Basis die Gestalt

$$1 - \hat{x} - \hat{y}, \hat{x}, \hat{y}$$

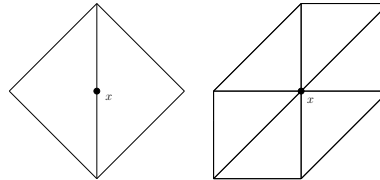
besitzt. □

Zur Definition globaler Finite-Element-Räume betrachten wir eine Unterteilung (Triangulierung) \mathcal{T}_h des polyhedralen Gebiets Ω in abgeschlossene Polyeder K mit zugehörigen lokalen Räumen $P(K)$. Die Polyeder K werden Gitterzellen genannt und ihre Vereinigung Gitter. Eine Triangulierung eines polyhedral berandeten Gebiets Ω wird regulär genannt falls:

- die Vereinigung aller Gitterzellen gleich $\overline{\Omega}$ ist,
- der Durchschnitt zweier Gitterzellen ist entweder leer oder eine gemeinsame m -Seitenfläche, $m \in \{0, \dots, d-1\}$.

Weiter seien $\Phi_1, \dots, \Phi_N : C^s(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$ stetige lineare Funktionale vom gleichen Typ wie im Beispiel 10.2. Die Einschränkung der Funktionale auf $C^s(K)$ erzeugt lokale Funktionale $\Phi_{K,1}, \dots, \Phi_{K,N_K}$, die als unisolvent in $P(K)$ vorausgesetzt werden. Mit ω_i werden diejenigen Gitterzellen bezeichnet, auf denen es eine Funktion gibt, für die das Funktional Φ_i nicht verschwindet.

Beispiel 10.5 Sei Φ_i die Punktauswertung in $\mathbf{x} \in K$. Liegt \mathbf{x} im Inneren von K , dann ist $\omega_i = K$. Liegt \mathbf{x} auf einer Seite von K , aber nicht in einem Eckpunkt, dann ist ω_i die Vereinigung von K und der anderen Gitterzelle, deren Rand diese Seitenfläche enthält. Liegt \mathbf{x} in einem Eckpunkt von K , dann ist ω_i die Vereinigung aller Gitterzellen, die ebenfalls diesen Eckpunkt besitzen.



□

Definition 10.6 Eine Funktion v definiert auf Ω mit $v|_{\text{int}(K)} \in P(K)$, $\text{int}(K) = K \setminus \partial K$, heißt stetig bezüglich Φ_i , falls

$$\Phi_i(v|_{K_1}) = \Phi_i(v|_{K_2})$$

für alle $K_1, K_2 \in \omega_i$.

Der Raum

$$S = \left\{ v \in L^\infty(\Omega) : v|_{\text{int}(K)} \in P(K) \text{ und } v \text{ ist stetig bezüglich } \Phi_i, i = 1, \dots, N \right\}$$

heißt Finite-Element-Raum. □

Die sogenannte globale Basis $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ des Raumes S ist definiert durch die Bedingung

$$\phi_j \in S, \quad \Phi_i(\phi_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

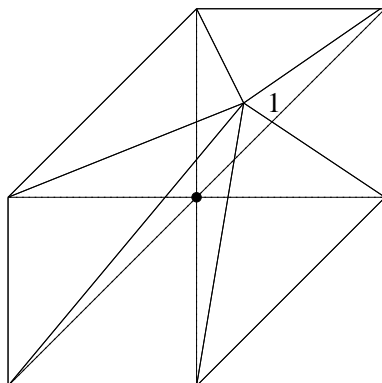


Abbildung 10.1: Globale, stückweise lineare Basisfunktion.

In Abbildung 10.1 ist beispielsweise eine globale, stückweise lineare Basisfunktion dargestellt.

Auf jeder Gitterzelle stimmt eine globale Basisfunktion mit einer lokalen Basisfunktion überein. Daraus folgt die Eindeutigkeit der globalen Basisfunktion.

Für viele Finite-Element-Räume folgt aus der Stetigkeit bezüglich $\{\Phi_i\}_{i=1}^N$ auch die Stetigkeit der Finite-Element-Funktionen. Nur in diesem Fall kann von Werten einer solchen Funktion auf den Seitenflächen gesprochen werden.

10.3 Parameterische Finite-Elemente

Im vorangegangenen Abschnitt wurden sehr allgemeine Finite-Element-Räume eingeführt. Zum Beispiel sind Gitter mit unterschiedlichen Typen von Gitterzellen erlaubt, beispielsweise Dreiecke und Vierecke im selben Gitter. Wir wollen jetzt spezieller die sogenannten parametrischen Finite-Elemente betrachten. Für diese existiert eine geschlossene Theorie.

In der parametrischen Definition von Finite-Elementen geht man von einer Referenzgitterzelle \hat{K} mit einem lokalen Raum $P(\hat{K})$ und Funktionalen $\hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_N$ sowie einer Klasse regulärer Transformationen $\{F_K : \hat{K} \rightarrow K\}$ aus. Die Bilder $\{K\}$ bilden die Menge der zulässigen Gitterzellen. Die lokalen Räume sind durch

$$P(K) = \left\{ p : p = \hat{p} \circ F_K^{-1}, \hat{p} \in \hat{P}(\hat{K}) \right\} \quad (10.7)$$

definiert und die lokalen Funktionale durch

$$\Phi_{K,i}(v(\mathbf{x})) = \hat{\Phi}_i(v(F_K(\hat{\mathbf{x}}))), \quad (10.8)$$

wobei $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_d)^T$ die Koordinaten der Referenzzelle bezeichnet. Es gilt $\mathbf{x} = F_K(\hat{\mathbf{x}})$.

10.4 Finite-Elemente auf Dreiecken und Tetraedern

Ein d -Simplex $K \subset \mathbb{R}^d$, ist die konvexe Hülle von $d+1$ Punkten $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{d+1} \in \mathbb{R}^d$, die die Eckpunkte von K bilden. Der Simplex K sei nichtdegeneriert, d.h. sein d -dimensionales Maß ist positiv. Die Nichtdegeneriertheit von K ist äquivalent zur

Regularität der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,d+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,d+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{d,d+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbf{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{di})^T$ ist. *Übungsaufgabe* Wir setzen immer voraus, dass von uns betrachtete Simplexes nichtdegeneriert sind.

Da K die konvexe Hülle der Punkte $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^{d+1}$ ist, kann K folgendermaßen parametrisiert werden

$$K = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i \mathbf{a}_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Die Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}$ in dieser Darstellung heißen baryzentrische Koordinaten von $\mathbf{x} \in K$. Nach Definition, erhält man sie als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{i=1}^{d+1} a_{ji} \lambda_i = x_j, \quad 1 \leq j \leq d, \quad \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1.$$

Dieses Gleichungssystem hat die oben angegebene Matrix A . Da diese regulär ist, sind die baryzentrischen Koordinaten eindeutig bestimmt.

Beispiel 10.7 Man sieht sofort, dass der Eckpunkt \mathbf{a}_i des Simplex die baryzentrischen Koordinaten $\lambda_i = \delta_{ij}$ besitzt.

Der Schwerpunkt des Simplex ist durch

$$S_K = \frac{1}{d+1} \sum_{i=1}^{d+1} \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{d+1} \frac{1}{d+1} \mathbf{a}_i$$

gegeben. Er besitzt demnach die baryzentrischen Koordinaten $\lambda_i = 1/(d+1)$, $i = 1, \dots, d+1$. \square

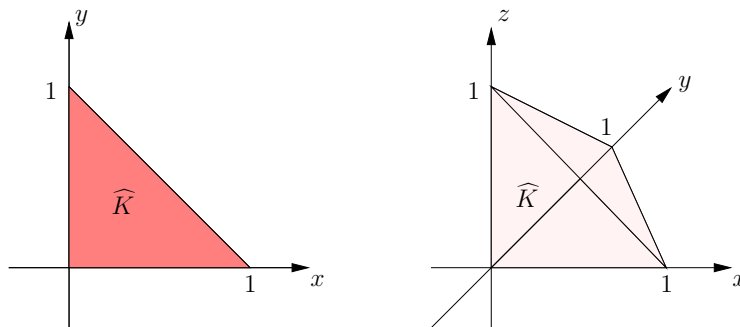
Für das lineare Gleichungssystem für die baryzentrischen Koordinaten erhält man die Lösung

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^d a_{ij}^{-1} x_j + a_{i,d+1}^{-1}, \quad 1 \leq i \leq d+1,$$

wobei $A^{-1} = (a_{ij}^{-1})$ die inverse Matrix von A ist. (Das ist als Symbol zu verstehen und nicht als Invertierung der Komponenten.) Damit ist $\{\lambda_i\}_{i=1}^{d+1}$ eine Familie affin linearer Funktionen von \mathbf{x} . Diese sind linear unabhängig, da jede nichttriviale Linearkombination der $\{\lambda_i\}_{i=1}^{d+1}$ in irgendeinem Eckpunkt einen Wert ungleich Null annimmt. Jedes Polynom vom Grad kleiner gleich m in \mathbf{x} lässt sich als ein Polynom vom Grad kleiner gleich m in $\{\lambda_i\}_{i=1}^{d+1}$ darstellen und umgekehrt (Basistransformation).

Die Referenzgitterzelle für Dreiecke und Tetraeder ist das Einheitssimplex

$$\hat{K} = \left\{ \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d \hat{x}_i \leq 1, \hat{x}_i \geq 0, i = 1, \dots, d \right\}.$$



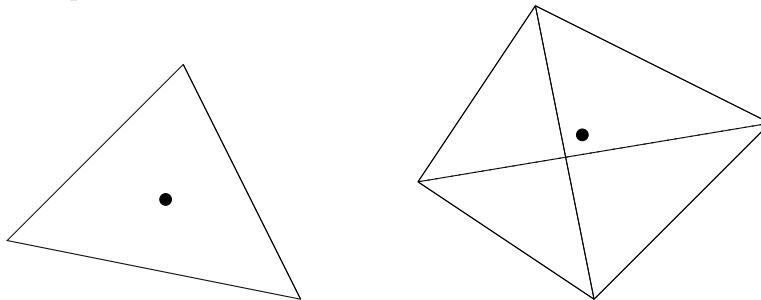
Die Klasse $\{F_K\}$ der zulässigen Transformationen sind die regulären affinen linearen Transformationen

$$F_K \hat{\mathbf{x}} = B \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}, \quad B \in \mathbb{R}^{d \times d}, \det(B) \neq 0, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d.$$

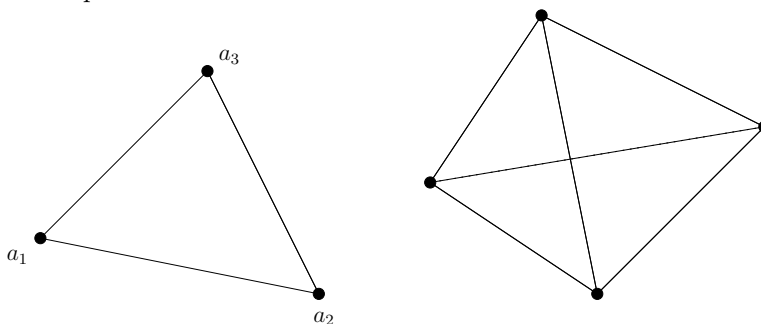
Die Bilder von F_K unter diesen Transformationen erzeugen die Menge der nichtdegenerierten Simplices $K \subset \mathbb{R}^d$. Wenn nun ein unisolventer Satz von Funktionalen auf dem Einheitssimplex gegeben ist, so erhält man mit (10.7) und (10.8) lokale Finite-Element-Räume auf jedem nichtdegenerierten Simplex. Die Gesamtheit der lokalen Räume heißt dann eine affine Familie simplizialer Finiterelemente.

Beispiel 10.8 Affine Familien Finiterelemente. Bei allen Beispielen sind die linearen Funktionalen auf der Referenzgitterzelle die Auswertungen der Funktion bzw. der Ableitungen in den Punkten mit den gleichen baryzentrischen Koordinaten. Finite-Elemente, die nur Funktionswerte in gewissen Punkten als Knotenfunktionale besitzen, werden Lagrange-Elemente genannt. Treten zudem Ableitungen als Knotenfunktionale auf, werden die Elemente Hermite-Elemente genannt.

- P_0 : *stückweise konstante Finite-Elemente*: Finite-Element-Raum besteht aus unstetigen Funktionen, $\dim P_0(K) = 1$, Funktional ist Funktionswert im Schwerpunkt S_K .

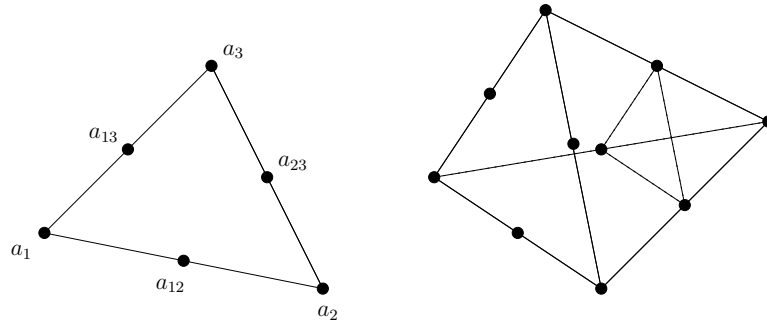


- P_1 : *konforme stückweise lineare Finite-Elemente*: Finite-Element-Raum ist Teilraum des $C(\bar{\Omega})$, $\dim P_1(K) = d + 1$, Funktionale sind Funktionswerte in den Eckpunkten der Gitterzelle.



Für die Funktionale $\Phi_i(v) = v(\mathbf{a}_i)$, $i = 1, \dots, d + 1$ haben wir die lokale Basis $\phi_i(\lambda) = \lambda_i$. Damit sind die Funktionale unisolvent bezüglich des Polynomraums $P_1(K)$. Nun wird gezeigt, dass die Elemente des zugehörigen Finite-Element-Raumes stetig sind. Seine K_1, K_2 zwei Gitterzellen mit einer gemeinsamen Seite E und sei $v \in P_1(= S)$. Die Fortsetzung von v_{K_1}, v_{K_2} auf E ist wieder eine lineare Funktion auf E . Diese lineare Funktion ist durch d Funktionale eindeutig bestimmt, die auf E definiert sind. Dafür kann man gerade die Funktionswerte in den Eckpunkten von E verwenden. Da die Funktionen aus S bezüglich der Funktionale stetig sind, muss $v_{K_1}|_E = v_{K_2}|_E$ gelten.

- P_2 : *konforme stückweise quadratische Finite-Elemente*: Finite-Element-Raum ist Teilraum des $C(\bar{\Omega})$, $\dim P_2(K) = (d + 1)(d + 2)/2$, Funktionale sind Funktionswerte in den Eckpunkten der Gitterzelle $-(d + 1)$, Funktionswerte in den Mittelpunkten der Kanten (jede Ecke ist mit jeder anderen verbunden) $-\sum_{i=1}^d i = d(d + 1)/2$



Zu den Funktionalen $\Phi_i(v) = v(\mathbf{a}_i)$, $i = 1, \dots, d + 1$ gehört die lokale Basis

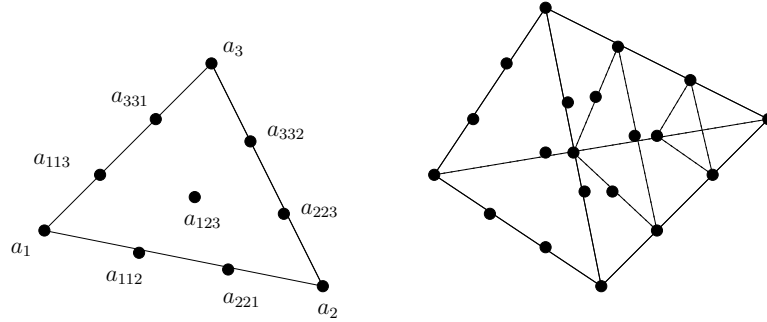
$$\phi_i(\lambda) = \lambda_i(2\lambda_i - 1).$$

Der Kantenmittelpunkt zwischen den Knoten \mathbf{a}_i und \mathbf{a}_j werde mit \mathbf{a}_{ij} bezeichnet. Die zugehörige lokale Basis ist

$$\phi_{ij} = 4\lambda_i\lambda_j, \quad i, j = 1, \dots, d + 1, \quad i < j.$$

Die Unisolvenzbedingung rechnet man direkt nach. Die Stetigkeit des zugehörigen Finite-Element-Raumes zeigt man genauso wie bei P_1 . Die Einschränkung einer quadratischen Funktion auf eine Seitenfläche ist wiederum quadratisch. Damit ist diese Funktion durch $d(d + 1)/2$ Funktionale auf E eindeutig bestimmt.

- P_3 : *konforme stückweise kubische Finite-Elemente*: Finite-Element-Raum ist Teilraum des $C(\bar{\Omega})$, $\dim P_3(K) = (d + 1)(d + 2)(d + 3)/6$, Funktionale sind Funktionswerte in den Eckpunkten der Gitterzelle $-(d + 1)$, zwei Funktionswerte auf den Kanten (jeweils nach jedem Drittel) $-2\sum_{i=1}^d i = d(d + 1)$, Funktionswert im Schwerpunkt der 2-Seitenflächen von K (jede 2-Seitenfläche von K wird durch drei Eckpunkte definiert, betrachte für jede Ecke alle möglichen Paare von anderen Eckpunkten, damit wird jede 2-Seitenfläche von K dreimal gezählt) $-(d + 1)(d - 1)d/6$.



Für die Funktionale

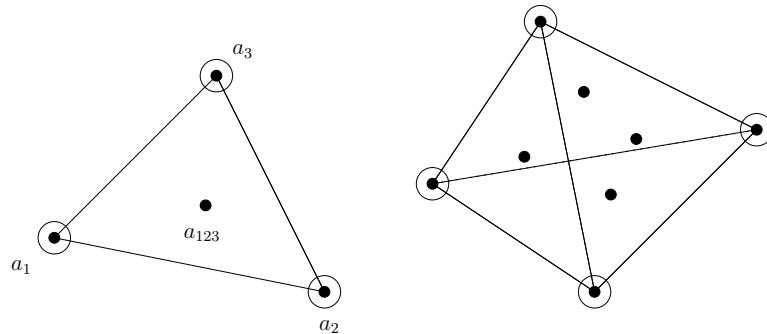
$$\begin{aligned}\Phi_i(v) &= v(\mathbf{a}_i), \quad i = 1, \dots, d+1, && \text{(Eckpunkte)} \\ \Phi_{ijj}(v) &= v(\mathbf{a}_{ijj}), \quad i, j = 1, \dots, d+1, i \neq j, && \text{(Punkte auf Kanten)} \\ \Phi_{ijk}(v) &= v(\mathbf{a}_{ijk}), \quad i = 1, \dots, d+1, i < j < k && \text{(Punkte auf 2-Seitenfl.)}\end{aligned}$$

lautet die lokale Basis

$$\phi_i(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda_i(3\lambda_i - 1)(3\lambda_i - 2), \quad \phi_{ijj}(\lambda) = \frac{9}{2}\lambda_i\lambda_j(3\lambda_i - 1), \quad \phi_{ijk}(\lambda) = 27\lambda_i\lambda_j\lambda_k.$$

Die Funktion $\phi_{ijk}(\lambda)$ wird Gitterzellen-Blasenfunktion genannt.

- *kubisches Hermite-Element*: Finite-Element-Raum ist Teilraum des $C(\overline{\Omega})$, die Dimension ist $(d+1)(d+2)(d+3)/6$, Funktionale sind Funktionswerte in den Eckpunkten der Gitterzelle – $(d+1)$, Funktionswert im Schwerpunkt der 2-Seitenflächen von K – $(d+1)(d-1)d/6$, partielle Ableitungen in den Eckpunkten – $d(d+1)$.



Dieses Element bildet keine affine Familie im strengen Sinne, weil die Funktionale für die partiellen Ableitungen $\hat{\Phi}_i(\hat{v}) = \partial_i \hat{v}(\mathbf{0})$ auf der Referenzgitterzelle abgebildet werden auf die Funktionale $\Phi_i(v) = \partial_{\mathbf{t}_i} v(\mathbf{a})$, wobei $\mathbf{a} = F_K(\mathbf{0})$ und \mathbf{t}_i sind Kantenrichtungen die adjazent zu \mathbf{a} sind (\mathbf{a} ist ein Endpunkt dieser Kante). Das ist genug, um alle ersten Ableitungen zu kontrollieren. Aber bei der praktischen Implementierung dieses Finite-Elementes muss darauf geachtet werden.

Wegen der obigen Bemerkung werden die Ableitungen in Kantenrichtung vorgegeben und als Funktionale verwendet

$$\begin{aligned}\Phi_i(v) &= v(\mathbf{a}_i), && \text{(Eckpunkte)} \\ \Phi_{ij}(v) &= \nabla v(\mathbf{a}_i) \cdot (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i), \quad i, j = 1, \dots, d-1, i \neq j, && \text{(Richt.-Abl.)} \\ \Phi_{ijk}(v) &= v(\mathbf{a}_{ijk}), \quad i < j < k, && \text{(2-Seitenfl.)}\end{aligned}$$

mit zugehöriger lokaler Basis

$$\begin{aligned}\phi_i(\lambda) &= -2\lambda_i^3 + 3\lambda_i^2 - 7\lambda_i \sum_{j < k, j \neq i, k \neq i} \lambda_j \lambda_k, \\ \phi_{ij}(\lambda) &= \lambda_i \lambda_j (2\lambda_i - \lambda_j - 1), \\ \phi_{ijk}(\lambda) &= 27\lambda_i \lambda_j \lambda_k.\end{aligned}$$

Den Beweis zur Unisolvenz findet man in der Literatur.

Die Stetigkeit wird nur für $d = 2$ gezeigt. Seien K_1, K_2 zwei Gitterzellen mit einer gemeinsamen Kante E , deren Tangentialeinheitsvektor mit \mathbf{t} bezeichnet wird. Seien V_1, V_2 die Endpunkte von E . Die Fortsetzungen $v|_{K_1}, v|_{K_2}$ auf E genügen den vier Bedingungen

$$v|_{K_1}(V_i) = v|_{K_2}(V_i), \quad \partial_{\mathbf{t}} v|_{K_1}(V_i) = \partial_{\mathbf{t}} v|_{K_2}(V_i), \quad i = 1, 2.$$

Da diese Fortsetzungen kubische Polynome sind, stimmen deren Werte auf E überein.

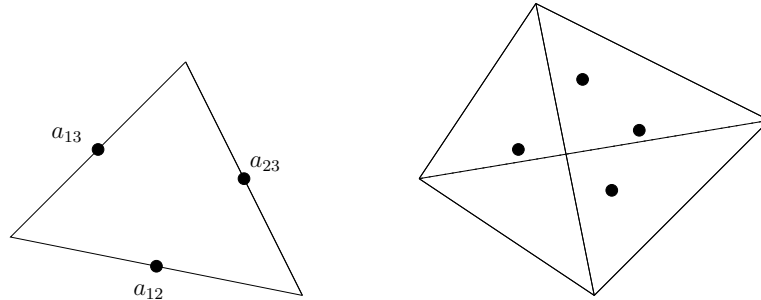
Das kubische Hermite-Finite-Element hat gegenüber dem Finite-Element P_3 einen Vorteil. Für $d = 2$ gilt nämlich für eine reguläre Triangulierung \mathcal{T}_h

$$\#(K) \approx 2\#(V), \quad \#(E) \approx 2\#(V),$$

wobei $\#(\cdot)$ die Anzahl der Dreiecke, Knotenpunkte und Kanten bezeichnet. Damit ist die Dimension von P_3 ungefähr $7\#(V)$, während die Dimension des kubischen Hermite-Finite-Elements ungefähr $5\#(V)$ ist. Dieser Unterschied erklärt sich daraus, dass die beiden Finite-Element-Räume verschieden sind. Beide Räume sind Räume stetiger Funktionen, aber die Funktionen des kubischen Hermite-Finite-Elements sind zusätzlich in den ersten Ableitungen in den Knotenpunkten stetig.

Man hat hier zwei unterschiedliche Finite-Element-Räume, deren lokale Polynomräume gleich sind (kubisch). Daran erkennt man die Bedeutung der Funktionale für die Definition eines globalen Finite-Element-Raums.

- P_1^{nc} : nichtkonformes lineares Finite-Element, Crouzeix-Raviart-Finite-Element [CR73], der Finite-Element-Raum besteht aus unstetigen Funktionen, $\dim P_1^{\text{nc}}(K) = (d + 1)$, Funktionale sind Funktionswerte in den Schwerpunkten der Seitenflächen, Finite-Element-Funktionen sind stetig in den Schwerpunkten der Seitenflächen. Äquivalent dazu ist, als Funktionale die Integralmittelwerte über die Seitenflächen zu nehmen. *Übungsaufgabe*



Zur Beschreibung dieses Finite-Elements verwenden wir die Notation

$$\Phi_i(v) = v(\mathbf{a}_{i-1, i+1}) \text{ für } d = 2, \quad \Phi_i(v) = v(\mathbf{a}_{i-2, i-1, i+1}) \text{ für } d = 3,$$

wobei die Punkte jeweils die Schwerpunkte der Seitenflächen mit den Eckpunkten der angegebenen Indizes sind. Dieses System ist unisolvent mit der Basis

$$\phi_i(\lambda) = 1 - d\lambda_i.$$

□

10.5 Finite-Elemente auf Rechtecken und Quadern

In diesem Abschnitt werden Finite-Elemente auf Rechtecken und Quadern betrachtet. Man findet in der Literatur zwei Referenzzellen, zum einen den Einheitswürfel

$[0, 1]^d$ und zum anderen den großen Einheitswürfel $[-1, 1]^d$. Im Grunde genommen ist es egal welche Referenzzelle man wählt. Wir nehmen den großen Einheitswürfel $\hat{K} = [-1, 1]^d$. Die Klasse der zulässigen Referenztransformationen $\{F_K\}$ besteht aus den regulären affin linearen Transformationen der Form

$$F_K \hat{\mathbf{x}} = B \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}, \quad B \in \mathbb{R}^{d \times d}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d,$$

mit der Diagonalmatrix B . Diese Transformationen bilden \hat{K} auf d -Rechtecke ab. Es wäre ebenfalls möglich, allgemeine affin lineare Transformationen zu verwenden. Die Klasse der zulässigen Gitterzellen bestünde dann aus Parallelepipeden (Parallelogramme). Genauso wie Rechtecke, ist auch die Klasse der Parallelogramme zu klein, um allgemeine Gebiete zu unterteilen. Deshalb beschränken wir uns hier auf Rechtecke. Der Fall allgemeiner Vierecke und Hexaeder wird im Abschnitt 10.6 kurz angeschnitten.

Man definiert die Polynomräume

$$Q_k = \text{span}\{\mathbf{x}^\alpha : 0 \leq \alpha_i \leq k, \text{ für } i = 1, \dots, d\}.$$

Beispiel 10.9 Der Raum Q_1 besteht aus allen d -linearen Polynomen. Sei insbesondere $d = 2$. Dann ist

$$Q_1 = \text{span}\{1, x, y, xy\},$$

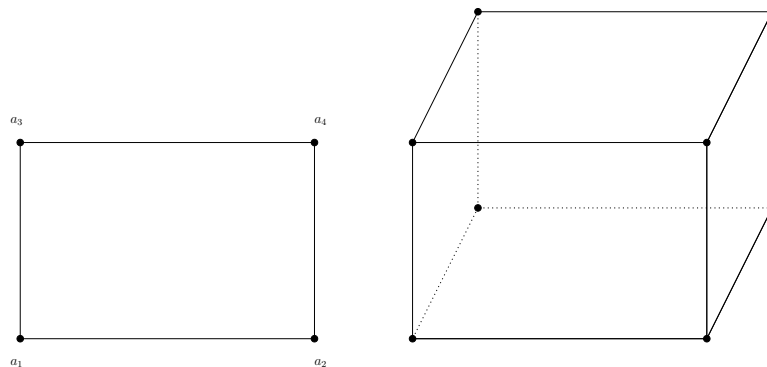
währendessen

$$P_1 = \text{span}\{1, x, y\}$$

ist. □

Beispiel 10.10 Finite-Elemente auf Rechtecken und Quadern. Die hier vorgestellten Finiten-Elemente können als Tensorprodukte eindimensionaler Finite-Elemente betrachtet werden. Demnach können die Basisfunktionen als Produkte eindimensionaler Funktionen geschrieben werden.

- Q_0 : *stückweise konstante Finite-Elemente*: Finite-Element-Raum besteht aus un stetigen Funktionen, $\dim Q_0(K) = 1$, Funktional ist Funktionswert im Schwerpunkt S_K .
- Q_1 : *konforme stückweise d -lineare Finite-Elemente*: Finite-Element-Raum ist Teilraum des $C(\bar{\Omega})$, $\dim Q_1(K) = 2^d$, Funktionale sind Funktionswerte in den Eckpunkten der Gitterzelle.



Eindimensionale Basisfunktionen auf dem Referenzintervall zur Produktbildung:

$$\hat{\phi}_1(\hat{x}) = \frac{1}{2}(1 - \hat{x}), \quad \hat{\phi}_2(\hat{x}) = \frac{1}{2}(1 + \hat{x}).$$

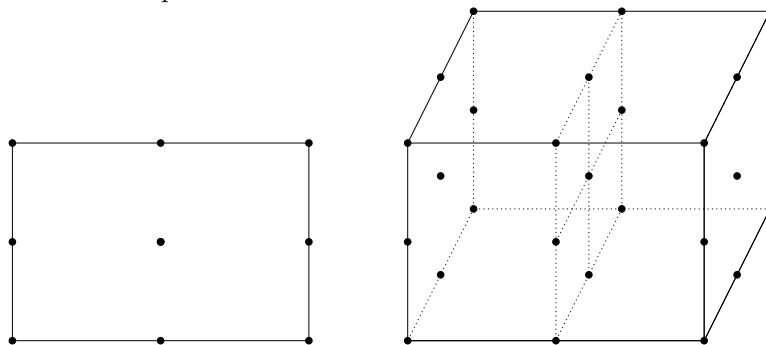
Die Basisfunktionen in zwei Dimensionen sind dann

$$\hat{\phi}_1(\hat{x})\hat{\phi}_1(\hat{y}), \quad \hat{\phi}_1(\hat{x})\hat{\phi}_2(\hat{y}), \quad \hat{\phi}_2(\hat{x})\hat{\phi}_1(\hat{y}), \quad \hat{\phi}_2(\hat{x})\hat{\phi}_2(\hat{y}).$$

Übungsaufgabe: Basisfktn. auf $Q_1(K)$, $K = (a, b) \times (c, d)$

Die Stetigkeit des Finite-Element-Raumes beweist man wie bei den simplizialen Finite-Elementen, denn die Einschränkung einer Funktion aus $Q_k(K)$ auf eine Seitenfläche E ist eine Funktion des Polynomraumes $Q_k(E)$ auf der Seitenfläche, $k \geq 1$.

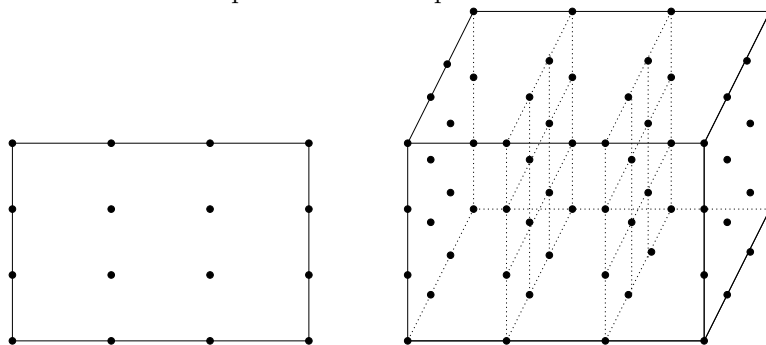
- Q_2 : konforme stückweise d -quadratische Finite-Elemente: Finite-Element-Raum ist Teilraum des $C(\bar{\Omega})$, $\dim Q_2(K) = 3^d$, Funktionale in einer Dimension sind Funktionswerte an den Intervallenden und im Mittelpunkt. In d Dimensionen ist es das entsprechende Tensorprodukt.



Die eindimensionalen Basisfunktionen auf dem Referenzintervall sind

$$\hat{\phi}_1(\hat{x}) = -\frac{1}{2}\hat{x}(1-\hat{x}), \quad \hat{\phi}_2(\hat{x}) = (1-\hat{x})(1+\hat{x}), \quad \hat{\phi}_3(\hat{x}) = \frac{1}{2}(1+\hat{x})\hat{x}.$$

- Q_3 : konforme stückweise d -kubische Finite-Elemente: Finite-Element-Raum ist Teilraum des $C(\bar{\Omega})$, $\dim Q_3(K) = 4^d$, Funktionale in einer Dimension sind Funktionswerte an den Intervallenden und in den Punkten $\hat{x} = -1/3$, $\hat{x} = 1/3$. In d Dimensionen ist es das entsprechende Tensorprodukt.



Die eindimensionalen Basisfunktionen auf dem Referenzintervall sind

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1(\hat{x}) &= -\frac{1}{16}(3\hat{x}+1)(3\hat{x}-1)(\hat{x}-1), \\ \hat{\phi}_2(\hat{x}) &= \frac{9}{16}(\hat{x}+1)(3\hat{x}-1)(\hat{x}-1), \\ \hat{\phi}_3(\hat{x}) &= -\frac{9}{16}(\hat{x}+1)(3\hat{x}+1)(\hat{x}-1), \\ \hat{\phi}_4(\hat{x}) &= \frac{1}{16}(3\hat{x}+1)(3\hat{x}-1)(\hat{x}+1). \end{aligned}$$

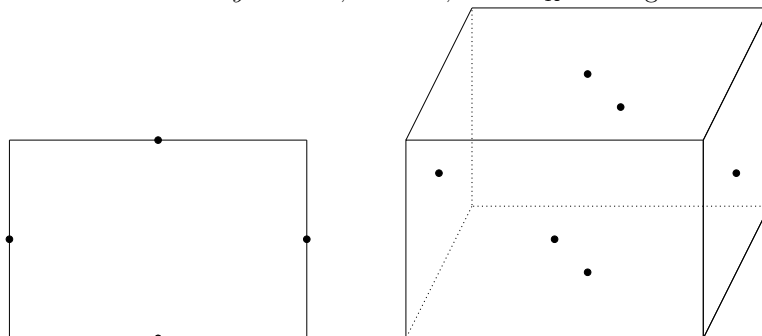
- Q_1^{rot} : rotiertes, unstetiges Q_1 -Finites-Element, Rannacher-Turek-Element [RT92]: Finite-Elemente-Raum besteht aus unstetigen Funktionen, $\dim Q_1^{\text{rot}}(K) = 2d$. Die Basis auf der Referenzgitterzelle ist

$$\begin{aligned} Q_1^{\text{rot}}(\hat{K}) &= \{\hat{p} : \hat{p} \in \text{span}\{1, \hat{x}, \hat{y}, \hat{x}^2 - \hat{y}^2\}\} && \text{für } d = 2, \\ Q_1^{\text{rot}}(\hat{K}) &= \{\hat{p} : \hat{p} \in \text{span}\{1, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{x}^2 - \hat{y}^2, \hat{y}^2 - \hat{z}^2\}\} && \text{für } d = 3. \end{aligned}$$

Man beachte, dass der transformierte Raum

$$Q_1^{\text{rot}}(K) = \{p = \hat{p} \circ F_K^{-1}, \hat{p} \in Q_1^{\text{rot}}(\hat{K})\}$$

Polynome der Form $ax^2 - by^2$ enthält, wobei a, b von F_K abhängen.



Die Funktionale sind die Werte in den Schwerpunkten der Seitenflächen. Für $d = 2$ ist die lokale Basis auf der Referenzzelle gegeben durch

$$\begin{aligned}\phi_1(\hat{x}, \hat{y}) &= -\frac{3}{8}(\hat{x}^2 - \hat{y}^2) - \frac{1}{2}\hat{y} + \frac{1}{4}, \\ \phi_2(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{3}{8}(\hat{x}^2 - \hat{y}^2) + \frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{4}, \\ \phi_3(\hat{x}, \hat{y}) &= -\frac{3}{8}(\hat{x}^2 - \hat{y}^2) + \frac{1}{2}\hat{y} + \frac{1}{4}, \\ \phi_4(\hat{x}, \hat{y}) &= \frac{3}{8}(\hat{x}^2 - \hat{y}^2) - \frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{4}.\end{aligned}$$

□

10.6 Parametrische Elemente auf allgemeinen Vierecken

Das Bild einer affin linearen Transformation des Einheitswürfels $[-1, 1]^d$, $d \in \{2, 3\}$, ist ein Parallelogramm. *Übungsaufgabe, zeige parallele Strecken werden auf parallele Strecken abgebildet* Wenn man Finite-Elemente auf allgemeinen Vierecken betrachten will, muss die Klasse der zulässigen Transformationen vergrößert werden.

Das einfachste parametrische Finite-Element auf Vierecken verwendet bilineare Abbildungen. Sei $\hat{K} = [-1, 1]^2$ das Einheitsquadrat und seien

$$F_K(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} F_K^1(\hat{\mathbf{x}}) \\ F_K^2(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12}\hat{x} + a_{13}\hat{y} + a_{14}\hat{x}\hat{y} \\ a_{21} + a_{22}\hat{x} + a_{23}\hat{y} + a_{24}\hat{x}\hat{y} \end{pmatrix} \quad F_K^i \in Q_1, \quad i = 1, 2,$$

bilineare Abbildungen von \hat{K} auf die Klasse der zulässige Vierecke, die durch folgende Bedingung gekennzeichnet ist: Eine Gitterzelle K ist zulässig, wenn

- die Seitenlängen von K sind größer als Null,
- die inneren Winkel von K sind kleiner als π . Daraus folgt, dass K konvex ist.

In dieser Klasse sind zum Beispiel Trapeze und Rhomben enthalten.

Die Funktionen des lokalen Raumes $P(K)$ auf der Gitterzelle K sind durch $p = \hat{p} \circ F_K^{-1}$ definiert. Es sind rationale Funktionen! Da die Einschränkung von F_K auf eine Kante von \hat{K} eine affine Abbildung ist, sind zum Beispiel im Falle des Q_1 -Finite-Elements die Funktionen auf K lineare Funktionen auf jeder Kante von K . Daher besteht der zugehörige Finite-Element-Raum aus stetigen Funktionen.

Nach dem gleichen Verfahren lassen sich auch finite Elemente höherer Ordnung auf Vierecken konstruieren. Da es dabei jedoch einige Probleme bei der Abschätzung des Interpolationsfehlers gibt, wird darauf nicht weiter eingegangen.

Kapitel 11

Interpolation

Die variationelle Formulierung der partiellen Differentialgleichungen, die wir betrachten, benutzt Funktionen aus Sobolev-Räumen. Wir wollen die Lösung mit Hilfe der Ritzschen Methode und endlich-dimensionaler Finite-Element-Räume approximieren. Der Fehler in der durch den Raum V induzierten Norm hängt davon ab, wie gut man Funktionen aus Sobolev-Räumen überhaupt mit Funktionen aus Finite-Element-Räumen annähern kann, siehe zum Beispiel das Lemma von Cea, Abschätzung (10.6). Die Approximationsgüte von Finite-Element-Räumen wird in diesem Abschnitt untersucht.

11.1 Polynominterpolation in Sobolev-Räumen

11.1.1 Das Bramble-Hilbert-Lemma

Sei Ω ein beschränktes Gebiet des \mathbb{R}^d mit Lipschitz-Rand. Wir beginnen mit grundlegenden Prinzipien der Polynominterpolation in Sobolev-Räumen.

Lemma 11.1 *Für jeden Multiindex α mit $|\alpha| \leq m$ sei ein $a_\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom $p \in P_m(\Omega)$ mit*

$$\int_{\Omega} \partial_{\alpha} p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = a_{\alpha}, \quad |\alpha| \leq m.$$

Beweis: Jedes Polynom aus $P_m(\Omega)$ hat die Gestalt

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{|\beta| \leq m} b_{\beta} \mathbf{x}^{\beta}.$$

Einsetzen dieser Darstellung in die Bedingungen ergibt ein lineares Gleichungssystem $M\mathbf{b} = \mathbf{a}$, mit

$$M = (M_{\alpha\beta}), \quad M_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \partial_{\alpha} \mathbf{x}^{\beta} \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{b} = (b_{\beta}), \quad \mathbf{a} = (a_{\alpha}),$$

für $|\alpha|, |\beta| \leq m$. Das ist ein quadratisches Gleichungssystem, welches genau dann eine eindeutige Lösung besitzt, wenn M regulär ist.

Angenommen, M ist singular. Dann besitzt das zugehörige homogene Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung. Das heißt, es gibt ein Polynom $q \in P_m(\Omega) \setminus 0$ mit

$$\int_{\Omega} \partial_{\alpha} q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \quad \text{für alle } |\alpha| \leq m.$$

Das Polynom q besitzt die Darstellung $q(\mathbf{x}) = \sum_{|\beta| \leq m} c_\beta \mathbf{x}^\beta$. Wähle nun ein $c_\beta \neq 0$ mit maximalem $|\beta|$. Dann gilt $\partial_\beta q(\mathbf{x}) = c_\beta = \text{const} \neq 0$, was dem Verschwinden des Integrals für $\partial_\beta q(\mathbf{x})$ widerspricht. ■

Das Lemma besagt, dass ein Polynom eindeutig bestimmt ist, wenn man für jede Ableitung eine Bedingung an das Integral über Ω stellt.

Das nächste Lemma beinhaltet eine Ungleichung vom Poincaré-Typus. Dabei bezeichnen wir mit $D^k v$, $k \in \mathbb{N}$, die totale Ableitung zur Ordnung k der Funktion v , z.B. für $k = 1$ den Gradienten von v .

Lemma 11.2 *Sei Ω konvex und in einer Kugel vom Radius R enthalten. Seien $k, l \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq l$ und sei $p \in \mathbb{R}$ mit $p \in [1, \infty]$. Dann gilt für jedes $v \in W^{l,p}(\Omega)$, welches*

$$\int_{\Omega} \partial_\alpha v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \text{ für alle } |\alpha| \leq l - 1$$

erfüllt, die Abschätzung

$$\|D^k v\|_{L^p(\Omega)} \leq c R^{l-k} \|D^l v\|_{L^p(\Omega)},$$

wobei die Konstante c nicht von Ω und von v abhängt.

Beweis: Im Fall $k = l$ braucht man nichts zu beweisen. Des weiteren genügt es, das Lemma für $k = 0$ und $l = 1$ zu beweisen, da der allgemeine Fall folgt, wenn man das Resultat dann auf $\partial_\alpha v$ anwendet.

Da Ω als konvex vorausgesetzt wurde, kann der Mittelwertsatz in der Form

$$v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{y}) = \int_0^1 \nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, dt,$$

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ geschrieben werden. Integration dieser Beziehung bezüglich \mathbf{y} ergibt

$$v(\mathbf{x}) \int_{\Omega} d\mathbf{y} - \underbrace{\int_{\Omega} v(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}}_{=0} = \int_{\Omega} \int_0^1 \nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, dt \, d\mathbf{y},$$

wobei das eine Integral auf der linken Seite nach Voraussetzung an v verschwindet. Es folgt

$$v(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \int_0^1 \nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, dt \, d\mathbf{y}.$$

Nun werden die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Vektoren und die Abschätzung $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq 2R$ verwendet

$$|v(\mathbf{x})| \leq \frac{2R}{|\Omega|} \int_{\Omega} \int_0^1 \|\nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y})\|_2 \, dt \, d\mathbf{y}. \quad (11.1)$$

Für $p < \infty$ wird diese Abschätzung mit p potenziert und bezüglich \mathbf{x} integriert. Man erhält durch Anwendung der Hölderschen Ungleichung mit $p^{-1} + q^{-1} = 1 \implies p/q - p = p(1/q - 1) = -1$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} &\leq \frac{cR^p}{|\Omega|^p} \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \int_0^1 \|\nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y})\|_2 \, dt \, d\mathbf{y} \right)^p \, d\mathbf{x} \\ &\leq \frac{cR^p}{|\Omega|^p} \int_{\Omega} \underbrace{\left[\left(\int_{\Omega} \int_0^1 1^q \, dt \, d\mathbf{y} \right)^{p/q} \right]}_{|\Omega|^{p/q}} \\ &\quad \times \left(\int_{\Omega} \int_0^1 \|\nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y})\|_2^p \, dt \, d\mathbf{y} \right) \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{cR^p}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \int_0^1 \|\nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y})\|_2^p \, dt \, d\mathbf{y} \right) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nun werden die Integrationen vertauscht (Satz von Fubini)

$$\int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \leq \frac{cR^p}{|\Omega|} \int_0^1 \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \|\nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y})\|_2^p \, d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x} \, dt.$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung in einer Dimension findet man ein $t_0 \in [0, 1]$, so dass

$$\int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \leq \frac{cR^p}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \|\nabla v(t_0\mathbf{x} + (1-t_0)\mathbf{y})\|_2^p \, d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}.$$

Wir setzen $\|\nabla v(\mathbf{x})\|_2^p$ auf \mathbb{R}^d durch Null fort und nennen die Fortsetzung ebenfalls $\|\nabla v(\mathbf{x})\|_2^p$. Dann ist

$$\int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \leq \frac{cR^p}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla v(t_0\mathbf{x} + (1-t_0)\mathbf{y})\|_2^p \, d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}.$$

Sei $t_0 \in [0, 1/2]$. Da das Integrationsgebiet nun der ganze \mathbb{R}^d ist, ergibt die Variablensubstitution $t_0\mathbf{x} + (1-t_0)\mathbf{y} = \mathbf{z}$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla v(t_0\mathbf{x} + (1-t_0)\mathbf{y})\|_2^p \, d\mathbf{y} = \frac{1}{1-t_0} \int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla v(\mathbf{z})\|_2^p \, d\mathbf{z} \leq 2 \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Führt man nun noch die äußere Integration über \mathbf{x} aus, so kürzt sich $|\Omega|$ und man erhält insgesamt

$$\int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \leq 2cR^p \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}^p,$$

da $1/(1-t_0) \leq 2$.

Im Fall $t_0 > 1/2$ vertauscht man die Rollen von \mathbf{x} und \mathbf{y} sowie die Integrationsreihenfolge mit dem Satz von Fubini und argumentiert analog.

Der Fall $p = \infty$ folgt aus (11.1). *Übungsaufgabe* ■

Das Lemma besagt, dass man die $L^p(\Omega)$ -Norm einer niederen Ableitung von v durch dieselbe Norm einer höheren Ordnung abschätzen kann, falls die Integralmittelwerte der niederen Ableitungen verschwinden. Eine wichtige Anwendung dieses Lemmas ist der Beweis des Bramble–Hilbert–Lemmas. Dieses besagt, dass der Wert eines stetigen linearen Funktionals, das auf einem Sobolev–Raum definiert ist und auf einem Polynomraum der Ordnung m verschwindet, durch die Lebesgue–Norm der $m+1$ -ten totalen Ableitung der Funktionen aus dem Sobolev–Raum abgeschätzt werden kann.

Satz 11.3 Bramble–Hilbert–Lemma. *Seien $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 0$, $p \in [1, \infty]$ und $F : W^{m+1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetiges lineares Funktional und seien die Voraussetzungen der Lemmata 11.1 und 11.2 erfüllt. Weiter sei*

$$F(p) = 0 \quad \forall p \in P_m(\Omega).$$

Dann gibt es eine Konstante $c(\Omega)$, die unabhängig von v und F ist, mit

$$|F(v)| \leq c(\Omega) \|D^{m+1}v\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall v \in W^{m+1,p}(\Omega).$$

Beweis: Sei $v \in W^{m+1,p}(\Omega)$. Wegen Lemma 11.1 gibt es ein Polynom aus $P_m(\Omega)$ mit

$$\int_{\Omega} \partial_{\alpha}(v+p) \, d\mathbf{x} = 0 \quad \text{für } |\alpha| \leq m.$$

Lemma 11.2 liefert, mit $l = m+1$, nun die Abschätzung

$$\|v+p\|_{W^{m+1,p}(\Omega)} \leq c(\Omega) \|D^{m+1}(v+p)\|_{L^p(\Omega)} = c(\Omega) \|D^{m+1}v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Aus dem Verschwinden von F für $p \in P_m(\Omega)$ und der Stetigkeit von F folgt nun

$$|F(v)| = |F(v+p)| \leq c \|v+p\|_{W^{m+1,p}(\Omega)} \leq c(\Omega) \|D^{m+1}v\|_{L^p(\Omega)}. \quad \blacksquare$$

11.1.2 Interpolationsfehlerabschätzung

Der Interpolationsfehler für affine Familien Finiter-Elemente wird nun mit Hilfe des Bramble–Hilbert–Lemmas abgeschätzt. Die Strategie wird darin bestehen, dass man

- zuerst Abschätzungen auf einer Referenzgitterzelle zeigt,
- dann werden alle Abschätzungen über beliebige Gitterzellen K auf Abschätzungen über die Referenzgitterzelle überführt,
- die dort gezeigten Abschätzungen werden verwendet und
- schließlich wird auf K zurücktransformiert.

Dabei muss man auch untersuchen, was bei den beiden Transformationen geschieht.

Seien $\hat{K} \in \mathbb{R}^d, d \in \{2, 3\}$, eine Referenzgitterzelle (abgeschlossenes und beschränktes Polyeder), $\hat{P}(\hat{K})$ ein Polynomraum der Dimension N und $\hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_N : C^s(\hat{K}) \rightarrow \mathbb{R}$ stetige lineare Funktionale. Es wird vorausgesetzt, dass die Unisolvenzbedingung für den Raum $\hat{P}(\hat{K})$ bezüglich der Funktionale $\hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_N$ erfüllt ist. Dann gibt es eine lokale Basis $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_N \in \hat{P}(\hat{K})$.

Für $\hat{v} \in C^s(\hat{K})$ wird die Interpolierende $I_{\hat{K}}\hat{v}$ durch

$$I_{\hat{K}}\hat{v}(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^N \hat{\Phi}_i(\hat{v})\hat{\phi}_i(\hat{\mathbf{x}})$$

definiert. Der Operator $I_{\hat{K}}$ ist ein stetiger und linearer Operator von $C^s(\hat{K})$ nach $\hat{P}(\hat{K})$. Aus der Linearität folgt, dass $I_{\hat{K}}$ die Identität auf $\hat{P}(\hat{K})$ ist *Übungsaufgabe*

$$I_{\hat{K}}\hat{p} = \hat{p} \quad \forall \hat{p} \in \hat{P}(\hat{K}).$$

Beispiel 11.4 Seien $\hat{K} \subset \mathbb{R}^d$ beliebig, $\hat{P}(\hat{K}) = P_0(\hat{K})$ und

$$\hat{\Phi}(\hat{v}) = \frac{1}{|\hat{K}|} \int_{\hat{K}} \hat{v}(\hat{\mathbf{x}}) \, d\hat{\mathbf{x}}.$$

Das Funktional $\hat{\Phi}$ ist stetig auf $C^0(\hat{K})$, da

$$|\hat{\Phi}(\hat{v})| \leq \frac{1}{|\hat{K}|} \int_{\hat{K}} |\hat{v}(\hat{\mathbf{x}})| \, d\hat{\mathbf{x}} \leq \frac{|\hat{K}|}{|\hat{K}|} \max_{\hat{\mathbf{x}} \in \hat{K}} |\hat{v}(\hat{\mathbf{x}})| = \|\hat{v}\|_{C^0(\hat{K})}.$$

Für die konstante Funktion $1 \in P_0(\hat{K})$ gilt $\hat{\Phi}(1) = 1 \neq 0$. Damit folgt die Unisolvenzbedingung und $\{1\}$ ist die lokale Basis. Der Operator

$$I_{\hat{K}}\hat{v}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\Phi}(\hat{v})\hat{\phi}(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{|\hat{K}|} \int_{\hat{K}} \hat{v}(\hat{\mathbf{x}}) \, d\hat{\mathbf{x}}$$

ist der Mittelwertoperator, d.h. jede stetige Funktion auf \hat{K} wird durch eine konstante Funktion interpoliert, deren Funktionswert gleich dem Integralmittelwert ist.

Man kann auch $\hat{\Phi}(\hat{v}) = \hat{v}(\hat{\mathbf{x}}_0)$ für einen beliebigen Punkt $\hat{\mathbf{x}}_0 \in \hat{K}$ setzen. Auch dieses Funktional ist linear und stetig auf $C^0(\hat{K})$. Der damit definierte Interpolationsoperator $I_{\hat{K}}$ interpoliert jede stetige Funktion durch eine konstante Funktion, deren Funktionswert gleich dem Funktionswert in $\hat{\mathbf{x}}_0$ ist.

Dieses Beispiel zeigt, dass der Interpolationsoperator $I_{\hat{K}}$ von $\hat{P}(\hat{K})$ und von den gewählten Funktionalen $\hat{\Phi}_i$ abhängt.

Übungsaufgabe, Interpolationen für andere FE □

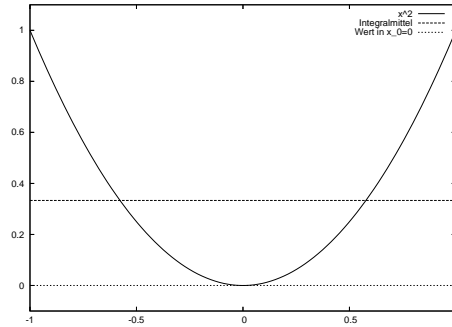


Abbildung 11.1: Interpolation von x^2 im Intervall $[-1, 1]$ in den P_0 mit Integralmittelwert und mit den Funktionswert in $x_0 = 0$.

Nun wird die Interpolationsfehlerabschätzung auf der Referenzgitterzelle gezeigt.

Satz 11.5 Seien $P_m(\hat{K}) \subset \hat{P}(\hat{K})$ und $p \in [1, \infty]$ mit $(m+1-s)p > d$. Dann gibt es eine von \hat{v} unabhängige Konstante c mit

$$\|\hat{v} - I_{\hat{K}}\hat{v}\|_{W^{m+1,p}(\hat{K})} \leq c \|D^{m+1}\hat{v}\|_{L^p(\hat{K})} \quad \forall \hat{v} \in W^{m+1,p}(\hat{K}).$$

Beweis: Wegen der Sobolev–Ungleichung, Satz 4.24, ist die Einbettung

$$W^{m+1,p}(\hat{K}) \rightarrow C^s(\hat{K})$$

richtig für $(m+1-s)p > d$. Damit ist der Interpolationsoperator auf $W^{m+1,p}(\hat{K})$ wohldefiniert. Aus der Identität des Interpolationsoperators auf $P_m(\hat{K})$, der Beschränktheit des Interpolationsoperators (linear und stetig von $C^s(\hat{K}) \rightarrow \hat{P}(\hat{K}) \subset W^{m+1,p}(\hat{K})$, alle Normen in $P(\hat{K})$ sind äquivalent) und der Sobolev–Ungleichung erhält man für $\hat{q} \in P_m(\hat{K})$

$$\begin{aligned} \|\hat{v} - I_{\hat{K}}\hat{v}\|_{W^{m+1,p}(\hat{K})} &= \|\hat{v} + \hat{q} - I_{\hat{K}}(\hat{v} + \hat{q})\|_{W^{m+1,p}(\hat{K})} \\ &\leq \|\hat{v} + \hat{q}\|_{W^{m+1,p}(\hat{K})} + \|I_{\hat{K}}(\hat{v} + \hat{q})\|_{W^{m+1,p}(\hat{K})} \\ &\leq \|\hat{v} + \hat{q}\|_{W^{m+1,p}(\hat{K})} + c \|\hat{v} + \hat{q}\|_{C^s(\hat{K})} \\ &\leq c \|\hat{v} + \hat{q}\|_{W^{m+1,p}(\hat{K})}. \end{aligned}$$

In Lemma 11.1 wird \hat{q} nun so gewählt, dass

$$\int_{\hat{K}} \partial_{\alpha}(\hat{v} + \hat{q}) \, d\hat{\mathbf{x}} = 0 \quad \forall |\alpha| \leq m.$$

Damit sind die Voraussetzungen von Lemma 11.2 erfüllt und es gilt

$$\|\hat{v} + \hat{q}\|_{W^{m+1,p}(\hat{K})} \leq c \|D^{m+1}(\hat{v} + \hat{q})\|_{L^p(\hat{K})} = c \|D^{m+1}\hat{v}\|_{L^p(\hat{K})}.$$

■

Bemerkung 11.6 Im Satz wird nur verlangt, dass $P_m(\hat{K}) \subset \hat{P}(\hat{K})$. Das schließt nicht aus, dass $\hat{P}(\hat{K})$ auch Polynome höherer Ordnung enthält. Die benötigt man jedoch für die Interpolationsfehlerabschätzung nicht, sofern die im Satz angegebene Sobolev–Einbettung erfüllt ist. □

Um den Interpolationsfehler für beliebige Gitterzellen und schließlich für den Finite–Element–Raum zu untersuchen, müssen wir zuerst Eigenschaften der affinen Abbildung studieren.

Wir betrachten eine affine Familie von Finite-Elementen, deren Gitterzellen von den affinen Abbildungen

$$F_K \hat{\mathbf{x}} = B\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}$$

erzeugt werden, wobei B eine reguläre $d \times d$ -Matrix und \mathbf{b} ein d -Vektor ist.

Sei h_K der Durchmesser von $K = F_K(\hat{K})$ (größter Abstand zweier Punkte die zu K gehören). Die Bilder $\{K = F_K(\hat{K})\}$ sollen die folgende Bedingung erfüllen:

- $K \subset \mathbb{R}^d$ ist in einer Kugel vom Radius $c_R h_K$ enthalten,
- K enthält eine Kugel vom Radius $c_R^{-1} h_K$,

wobei die Konstante c_R unabhängig von K ist. Demzufolge gilt für alle K

$$\frac{\text{Umkreis}}{\text{Inkreis}} \leq c_R^2.$$

Eine Triangulierung, die dieser Eigenschaft genügt, wird quasi-uniform genannt. Die Namensgebung ist in der Literatur nicht einheitlich.

Lemma 11.7 Für jede Matrixnorm $\|\cdot\|$ gelten die Abschätzungen

$$\|B\| \leq ch_K, \quad \|B^{-1}\| \leq ch_K^{-1},$$

wobei die Konstanten von der Matrixnorm abhängen.

Beweis: Da \hat{K} ein polygonal berandetes Gebiet ist, also insbesondere ein Lipschitz-Gebiet, enthält es eine Kugel $B(\hat{\mathbf{x}}_0, r)$. Daher ist $\hat{\mathbf{x}}_0 + \hat{\mathbf{y}} \in \hat{K}$ für alle $\|\hat{\mathbf{y}}\|_2 = r$. Somit sind die Bilder

$$\mathbf{x}_0 = B\hat{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} = B(\hat{\mathbf{x}}_0 + \hat{\mathbf{y}}) + \mathbf{b}$$

in K enthalten. Da die Triangulierung quasi-uniform ist, folgt für K

$$\|B\hat{\mathbf{y}}\|_2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2 \leq c_R h_K.$$

Für die Spektralnorm gilt

$$\|B\|_2 = \sup_{\hat{\mathbf{z}} \neq \mathbf{0}} \frac{\|B\hat{\mathbf{z}}\|_2}{\|\hat{\mathbf{z}}\|_2} = \frac{1}{r} \sup_{\|\hat{\mathbf{z}}\|_2=r} \|B\hat{\mathbf{z}}\|_2 \leq \frac{2c_R}{r} h_K.$$

Da alle Matrixnormen äquivalent sind, gilt die Abschätzung auch für alle anderen Matrixnormen.

Die Abschätzung für $\|B^{-1}\|$ folgt mit den gleichen Argumenten, wenn man die Rollen von K und \hat{K} vertauscht. ■

Im Beweis sieht man, dass die Konstanten in den Abschätzungen zwar nicht von K , aber von \hat{K} und vor allem von der Konstanten c_R abhängen.

Die Elemente der Matrizen B und B^{-1} werden mit b_{ij} und $b_{ij}^{(-1)}$ bezeichnet. Da $\|B\|_\infty = \max_{i,j} |b_{ij}|$ ebenfalls eine Matrixnorm ist, gilt

$$|b_{ij}| \leq ch_K, \quad |b_{ij}^{(-1)}| \leq ch_K^{-1}.$$

Aus den elementweisen Abschätzungen für die Matrix B erhält man (Leibnizsche Determinantenformel)

$$|\det B| \leq ch_K^d, \quad |\det B^{-1}| \leq ch_K^{-d}.$$

Als nächstes wollen wir sicherstellen, dass der transformierte Interpolationsoperator mit dem natürlichen Interpolationsoperator auf K übereinstimmt. Der letztere ist durch

$$I_K v = \sum_{i=1}^N \Phi_{K,i}(v) \phi_{K,i}$$

definiert, wobei $\{\phi_{K,i}\}$ die Basis des Raums

$$P(K) = \{p : K \rightarrow \mathbb{R} : p = \hat{p} \circ F_K^{-1}, \hat{p} \in \hat{P}(\hat{K})\}$$

ist, die der Beziehung $\Phi_{K,i}(\phi_{K,j}) = \delta_{ij}$ genügt. Die Funktionale waren durch

$$\Phi_{K,i}(v) = \hat{\Phi}_i(v \circ F_K)$$

definiert. Daher folgt aus der Bedingung für die lokale Basis

$$\Phi_{K,i}(\hat{\phi}_j \circ F_K^{-1}) = \hat{\Phi}_i(\hat{\phi}_j) = \delta_{ij},$$

also $\phi_{K,j} = \hat{\phi}_j \circ F_K^{-1}$. Aus

$$\begin{aligned} I_{\hat{K}} \hat{v} &= \sum_{i=1}^N \hat{\Phi}_i(\hat{v}) \hat{\phi}_i = \sum_{i=1}^N \Phi_{K,i}(\underbrace{\hat{v} \circ F_K^{-1}}_{=v}) \phi_i \circ F_K = \left(\sum_{i=1}^N \Phi_{K,i}(v) \phi_{K,i} \right) \circ F_K \\ &= I_K v \circ F_K \end{aligned}$$

folgt, dass $I_{\hat{K}} \hat{v}$ sich richtig transformiert.

Mit der Kettenregel folgt *Übungsaufgabe*

$$\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_i} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial \hat{v}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}_j} b_{ji}^{(-1)}, \quad \frac{\partial \hat{v}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}_i} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_j} b_{ji}.$$

Daraus ergibt sich (mit jeder Ableitung erhält man einen weiteren Faktor von B bzw. B^{-1})

$$\|D_{\mathbf{x}}^k v(\mathbf{x})\|_2 \leq ch_K^{-k} \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^k \hat{v}(\hat{\mathbf{x}})\|_2, \quad \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^k \hat{v}(\hat{\mathbf{x}})\|_2 \leq ch_K^k \|D_{\mathbf{x}}^k v(\mathbf{x})\|_2.$$

Man erhält

$$\int_K \|D_{\mathbf{x}}^k v(\mathbf{x})\|_2^p d\mathbf{x} \leq ch_K^{-kp} |\det B| \int_{\hat{K}} \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^k \hat{v}(\hat{\mathbf{x}})\|_2^p d\hat{\mathbf{x}} \leq ch_K^{-kp+d} \int_{\hat{K}} \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^k \hat{v}(\hat{\mathbf{x}})\|_2^p d\hat{\mathbf{x}}$$

und

$$\int_{\hat{K}} \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^k \hat{v}(\hat{\mathbf{x}})\|_2^p d\hat{\mathbf{x}} \leq ch_K^{kp} |\det B^{-1}| \int_K \|D_{\mathbf{x}}^k v(\mathbf{x})\|_2^p d\mathbf{x} \leq ch_K^{kp-d} \int_K \|D_{\mathbf{x}}^k v(\mathbf{x})\|_2^p d\mathbf{x}.$$

Aus der Interpolationsfehlerabschätzung auf der Referenzzelle folgt

$$\|D_{\hat{\mathbf{x}}}^k (\hat{v} - I_{\hat{K}} \hat{v})\|_{L^p(\hat{K})}^p \leq c \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^{m+1} \hat{v}\|_{L^p(\hat{K})}^p, \quad 0 \leq k \leq m+1.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \|D_{\mathbf{x}}^k (v - I_K v)\|_{L^p(K)}^p &\leq ch_K^{-kp+d} \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^k (\hat{v} - I_{\hat{K}} \hat{v})\|_{L^p(\hat{K})}^p \\ &\leq ch_K^{-kp+d} \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^{m+1} \hat{v}\|_{L^p(\hat{K})}^p \\ &\leq ch_K^{(m+1-k)p} \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^{m+1} \hat{v}\|_{L^p(\hat{K})}^p \\ &\leq ch_K^{(m+1-k)p} \|D_{\mathbf{x}}^{m+1} v\|_{L^p(K)}^p. \end{aligned}$$

Damit haben ist die Interpolationsfehlerabschätzung für eine beliebige Gitterzelle gezeigt.

Satz 11.8 *Sei eine affine Familie Finiter-Elemente durch eine Referenzgitterzelle \hat{K} , Funktionale $\{\hat{\Phi}_i\}$ und einen Polynomraum $\hat{P}(\hat{K})$ gegeben. Weiter seien alle Bedingungen aus dem Satz 11.5 erfüllt. Dann gibt es eine Konstante c unabhängig von $v \in W^{m+1,p}(K)$ mit*

$$\|D^k (v - I_K v)\|_{L^p(K)} \leq ch_K^{m+1-k} \|D^{m+1} v\|_{L^p(K)}.$$

Man beachte, dass die Potenz von h_K unabhängig von p und d ist.

Sei eine quasi-uniforme Triangulierung gegeben und definiere

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \{h_K\}.$$

Dann erhält man durch Summation über die Gitterzellen die Interpolationsfehlerabschätzung für den globalen Finite-Element-Raum:

$$\begin{aligned} \|D^k(v - I_h v)\|_{L^p(\Omega)} &= \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|D^k(v - I_K v)\|_{L^p(K)}^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} ch_K^{(m+1-k)p} \|D^{m+1}v\|_{L^p(K)}^p \right)^{1/p} \\ &\leq ch^{(m+1-k)} \|D^{m+1}v\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Für lineare Finite-Elemente P_1 ($m = 1$) hat man beispielsweise die Abschätzungen

$$\|v - I_h v\|_{L^p(\Omega)} \leq ch^2 \|D^2 v\|_{L^p(\Omega)}, \quad \|\nabla(v - I_h v)\|_{L^p(\Omega)} \leq ch \|D^2 v\|_{L^p(\Omega)},$$

falls $v \in W^{2,p}(\Omega)$.

11.2 Inverse Abschätzungen

In diesem Abschnitt wird die Methode zum Beweis der Interpolationsfehlerabschätzung dazu verwendet, um sogenannte inverse Abschätzungen zu zeigen. Im Gegensatz zu Interpolationsfehlerabschätzungen wird dabei eine Norm einer höheren Ableitung einer Finite-Element-Funktion durch die Norm einer niederen Ableitung abgeschätzt. Man erhält als Faktor dann negative Potenzen des Durchmessers der Gitterzelle.

Satz 11.9 *Seien $0 \leq k \leq l$ natürliche Zahlen und $p, q \in [1, \infty]$. Dann gibt es eine Konstante c , die nur von $k, l, p, q, \hat{K}, \hat{P}(\hat{K})$ abhängt, mit*

$$\|D^l v_h\|_{L^q(K)} \leq ch_K^{(k-l)-d(p^{-1}-q^{-1})} \|D^k v_h\|_{L^p(K)} \quad \forall v_h \in P(K).$$

Beweis: Zunächst wird die Abschätzung für $h_{\hat{K}} = 1$ und $k = 0$ auf der Referenzzelle gezeigt. Da in einem endlichdimensionalen Raum alle Normen äquivalent sind, kann man eine Seminorm durch eine Norm abschätzen. Man erhält

$$\|D^l \hat{v}_h\|_{L^q(\hat{K})} \leq \|\hat{v}_h\|_{W^{l,q}(\hat{K})} \leq c \|\hat{v}_h\|_{L^p(\hat{K})} \quad \forall \hat{v}_h \in \hat{P}(\hat{K}).$$

Im Falle $k > 0$ setzt man

$$\tilde{P}(\hat{K}) = \left\{ \partial_{\alpha} \hat{v}_h : \hat{v}_h \in \hat{P}(\hat{K}), |\alpha| = k \right\},$$

was gleichfalls ein Polynomraum ist. Wendet man die obige Abschätzung auf $\tilde{P}(\hat{K})$ an, erhält man

$$\begin{aligned} \|D^l \hat{v}_h\|_{L^q(\hat{K})} &\leq c \sum_{|\alpha|=k} \|D^{l-k}(\partial_{\alpha} \hat{v}_h)\|_{L^q(\hat{K})} \leq c \sum_{|\alpha|=k} \|\partial_{\alpha} \hat{v}_h\|_{L^q(\hat{K})} \\ &\leq c \|D^k \hat{v}_h\|_{L^p(\hat{K})}. \end{aligned}$$

Diese Abschätzung wird genauso wie im vorherigen Abschnitt auf die Gitterzelle K transformiert. Aus den Abschätzungen für die Transformationen erhält man

$$\begin{aligned} \|D^l v_h\|_{L^q(K)} &\leq ch_K^{-l+d/q} \|D^l \hat{v}_h\|_{L^q(\hat{K})} \leq ch_K^{-l+d/q} \|D^k \hat{v}_h\|_{L^p(\hat{K})} \\ &\leq ch_K^{k-l+d/q-d/p} \|D^k v_h\|_{L^p(K)}. \end{aligned}$$

■

Der springende Punkt im Beweis war die Äquivalenz aller Normen, eine Eigenschaft die bekanntlich bei unendlich-dimensionalen Räumen nicht gilt.

Für $p = q$ überträgt sich die Abschätzung auf den globalen Finite-Element-Raum, sofern eine reguläre Triangulierung von Ω verwendet wird

$$\|D^l v_h\|_{L_h^p(\Omega)} \leq ch^{k-l} \|D^k v_h\|_{L_h^p(\Omega)},$$

mit

$$\|\cdot\|_{L_h^p(\Omega)} = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|\cdot\|_{L^p(K)}^p \right)^{1/p}.$$

Die zellenweise Normdefinition ist wichtig für $l \geq 2$, da dann die Finite-Element-Funktionen im allgemeinen nicht mehr die nötige Regularität für die globale Norm besitzen.

Bei nichtlinearen Problemen ist manchmal eine andere inverse Abschätzung wichtig.

Satz 11.10 *Sei $S \in C^0(\Omega)$ ein Finite-Element-Raum, der auf einer regulären Triangulierung mit affin äquivalenten Gitterzellen definiert ist. Dann gilt*

$$\|v_h\|_{L^\infty(\Omega)} \leq c_d(h) \|v_h\|_{H^1(\Omega)}$$

mit $c_2(h) = c |\ln h|^{1/2}$, $c_d(h) = ch^{-d/2+1}$ für $d \geq 3$.

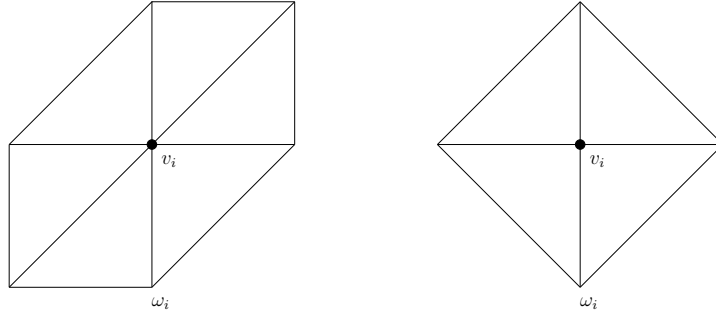
11.3 Interpolation nichtglatter Funktionen

In der Interpolationstheorie aus den letzten Abschnitten ist es zwingend erforderlich, dass der Interpolationsoperator stetig definiert ist auf dem Sobolev-Raum, dem die zu interpolierende Funktion angehört. Wenn man beispielsweise unstetige Funktionen mit stetigen, stückweise linearen Finite-Elementen interpolieren will, so erhält man aus den letzten Abschnitten keine Resultate. Am einfachsten lässt sich hier Abhilfe schaffen, indem die zu approximierende Funktion zuerst geglättet und dann die geglättete Funktion interpoliert wird. Bei dieser Methode kommt es jedoch zu Problemen am Rand von Ω . Diese Methode wird hier nicht weiter betrachtet.

Es gibt zwei oft genutzte Interpolationsoperatoren für nichtglatte Funktionen. Der Interpolationsoperator von Clément [Clé75] ist für Funktionen aus $L^1(\Omega)$ definiert und er lässt sich praktisch auf alle Finiten-Elemente verallgemeinern. Der Interpolationsoperator von Scott und Zhang [SZ90] ist spezieller. Er besitzt jedoch den Vorteil, dass er Nullrandbedingungen erhält. Wir werden hier nur den Interpolationsoperator von Clément, an Hand linearer Finiten-Elemente, betrachten.

Sei \mathcal{T}_h eine reguläre Triangulierung des polyhedralen Gebiets $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$, mit Simplexes K . Mit P_1 wird der Raum der stetigen, stückweise linearen Finiten-Elemente auf \mathcal{T}_h bezeichnet.

Zu jedem Knoten V_i der Triangulierung wird das Gebiet ω_i der Vereinigung aller Gitterzellen definiert, bei denen V_i ein Knoten ist.



Zu $v \in L^1(\Omega)$ definieren wir den Interpolationsoperator $R_h v \in P_1$ mit Hilfe der lokalen L^2 -Projektion. Sei $P_1(\omega_i)$ der Raum der stückweise linearen Finiten-Elemente auf ω_i . Dann ist die lokale L^2 -Projektion von $v \in L^1(\omega_i)$ die Lösung $p_i \in P_1(\omega_i)$ von

$$\int_{\omega_i} (v - p_i)(\mathbf{x})q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \quad \forall q \in P_1(\omega_i). \quad (11.2)$$

Setze

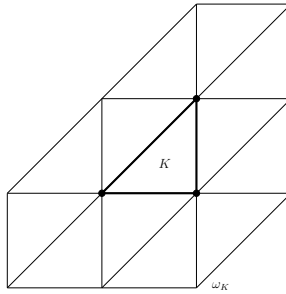
$$R_h v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^N p_i(V_i)\phi_i(\mathbf{x}),$$

wobei $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ die übliche Basis von P_1 ist. Da $R_h v$ eine Linearkombination der Basisfunktionen ist, gilt $R_h : L^1(\Omega) \rightarrow P_1$.

Satz 11.11 Seien $k, l \in \mathbb{N}$ und $q \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq k \leq l \leq 2$, $1 \leq q \leq \infty$. Sei ω_K die Vereinigung aller Gebiete ω_i , die die Gitterzelle K enthalten. Dann gilt für alle $v \in W^{l,q}(\omega_K)$ die Abschätzung

$$\|D^k(v - R_h v)\|_{L^q(K)} \leq ch^{l-k} \|D^l v\|_{L^q(\omega_K)} \quad (11.3)$$

mit $h = \text{diam}(\omega_K)$, wobei die Konstante c unabhängig von v und h ist.



Beweis: Die Behauptung ist offensichtlich im Falle $k = l = 2$, da $D^2 R_h v|_K = 0$. Sei $k \in \{0, 1\}$. Da die L^2 -Projektion ein Element bester Approximation liefert, folgt aus (11.2)

$$R_h p = p \quad \text{in } K \text{ für alle } p \in P_1(\omega_K). \quad (11.4)$$

Das bedeutet, dass R_h ein konsistenter Operator ist.

Als nächstes wird die Stabilität von R_h nachgewiesen. Mit Hilfe der inversen Ungleichung erhält man

$$\|p\|_{L^\infty(\omega_i)} \leq ch^{-d/2} \|p\|_{L^2(\omega_i)} \quad \text{für alle } p \in P_1(\omega_i).$$

Die inverse Ungleichung und die Definition (11.2) der lokalen L^2 -Projektion mit der Testfunktion $q = p_i$ liefern

$$\|p_i\|_{L^\infty(\omega_i)}^2 \leq ch^{-d} \|p_i\|_{L^2(\omega_i)}^2 \leq ch^{-d} \|v\|_{L^1(\omega_i)} \|p_i\|_{L^\infty(\omega_i)}.$$

Unter Verwendung der Hölderschen Ungleichung folgt nun für $\frac{1}{p} = 1 - \frac{1}{q}$ *Übungsaufgabe*

$$|p_i(V_i)| \leq ch^{-d/q} \|v\|_{L^q(\omega_i)} \quad (11.5)$$

für alle $V_i \in K$. Aus der Regularität der Triangulierung folgt für die Basisfunktionen (inverse Abschätzung)

$$\|D^k \phi_i\|_{L^\infty(K)} \leq ch^{-k}, \quad k = 0, 1. \quad (11.6)$$

Die Kombination von (11.5) und (11.6) ergibt die Stabilität von R_h

$$\begin{aligned} \|D^k R_h v\|_{L^q(K)} &\leq \sum_{V_i \in K} |p_i(V_i)| \|D^k \phi_i\|_{L^q(K)} \\ &\leq c \sum_{V_i \in K} h^{-d/q} \|v\|_{L^q(\omega_i)} \|D^k \phi_i\|_{L^\infty(K)} \|1\|_{L^q(K)} \\ &\leq c \sum_{V_i \in K} h^{-d/q} \|v\|_{L^q(\omega_i)} h^{-k} h^{d/q} \\ &= ch^{-k} \|v\|_{L^q(\omega_K)}. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Abgesehen davon, dass keine Referenzgitterzelle verwendet wird, läuft der Rest des Beweises genauso wie bei der Interpolationsabschätzung bei der Polynominterpolation, Satz 11.5. Nach Lemmata 11.1 und 11.2 gibt es ein Polynom $p \in P_1(\omega_K)$ mit

$$\|D^j(v - p)\|_{L^q(\omega_K)} \leq ch^{l-j} \|D^l v\|_{L^q(\omega_K)}, \quad 0 \leq j \leq l \leq 2. \quad (11.8)$$

Mit der Dreiecksungleichung, (11.4), (11.7) und (11.8) erhält man

$$\begin{aligned} \|D^k(v - R_h v)\|_{L^q(K)} &\leq \|D^k(v - p)\|_{L^q(K)} + \|D^k R_h(v - p)\|_{L^q(K)} \\ &\leq \|D^k(v - p)\|_{L^q(K)} + ch^{-k} \|v - p\|_{L^q(\omega_K)} \\ &\leq c \sum_{j=0}^l h^{j-k} \|D^j(v - p)\|_{L^q(\omega_K)} \\ &\leq c \sum_{j=0}^l h^{l-k} \|D^l v\|_{L^q(\omega_K)} = ch^{l-k} \|D^l v\|_{L^q(\omega_K)}. \end{aligned}$$

■

Falls alle Gitterzellen in ω_K etwa die gleiche Größe besitzen, kann in der Interpolationsfehlerabschätzung (11.3) h durch h_K ersetzt werden. Diese Eigenschaft der Gitterzellen ist oft gegeben.

s

Kapitel 12

Finite-Element-Methoden für Elliptische Gleichungen zweiter Ordnung

12.1 Allgemeine Konvergenzsätze

Wir haben bereits sogenannte nicht-konforme Finite-Elemente kennengelernt, das heißt, der Finite-Element-Raum V_h ist kein Teilraum des Raumes V in dem das stetige Problem definiert ist $V_h \not\subset V$. Das trifft auf das Crouzeix-Raviart- und das Rannacher-Turek-Element zu. Ein anderer Fall von Nichtkonformität ist gegeben, wenn das Gebiet nicht polyhedral berandet ist und approximiert werden muss. Für nichtkonforme Finite-Elemente ist die FEM kein Ritzsches Verfahren mehr, so dass der Konvergenzbeweis für dieses Verfahren aus Abschnitt 10.1 nicht verwendet werden kann. Der folgende abstrakte Konvergenzsatz gestattet auch die Analyse komplizierter Finiter-Elemente und Verfahren.

Für die Gitterweiten $\{h > 0\}$ seien S_h, V_h normierte Räume von Funktionen, die auf Gebieten $\{\Omega_h \subset \mathbb{R}^d\}$ definiert sind. Es wird vorausgesetzt, dass die Räume S_h endlichdimensional sind und dass S_h und V_h eine gemeinsame Norm $\|\cdot\|_h$ besitzen. In den später folgenden Anwendungen der abstrakten Theorie wird S_h ein Finite-Element-Raum sein und V_h wird so definiert, dass die Einschränkung und/oder Fortsetzung der Lösung des kontinuierlichen Problems auf Ω_h in V_h enthalten ist. Da die so modifizierte kontinuierliche Lösung im engeren Sinne das gegebene Problem nicht mehr löst, ist es konsequent, wenn in der abstrakten Theorie das kontinuierliche Problem nicht mehr vorkommt.

Seien Bilinearformen

$$\begin{aligned} a_h & : S_h \times S_h \rightarrow \mathbb{R}, \\ \tilde{a}_h & : (S_h + V_h) \times (S_h + V_h) \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

gegeben. Die Form a_h sei regulär in dem Sinn, dass es eine von h unabhängige Konstante $m > 0$ gibt, sodass zu jedem $v_h \in S_h$ ein $w_h \in S_h$, $\|w_h\|_h = 1$, existiert mit

$$m \|v_h\|_h \leq a_h(v_h, w_h). \quad (12.1)$$

Diese Bedingung ist äquivalent zur gleichmäßigen (unabhängig von h) Regularität der Steifigkeitsmatrix A mit Einträgen $a_{ij} = a_h(\phi_j, \phi_i)$. Für die zweite Bilinearform wird lediglich die Beschränktheit vorausgesetzt:

$$\tilde{a}_h(u, v) \leq M \|u\|_h \|v\|_h \quad \forall u, v \in S_h + V_h. \quad (12.2)$$

Des weiteren werden für die linearen Funktionale $\{f_h(\cdot)\}$ auf S_h die diskreten Probleme: Gesucht ist $u_h \in S_h$ mit

$$a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h) \quad \forall v_h \in S_h \quad (12.3)$$

definiert. Aufgrund der Regularität der Steifigkeitsmatrix ist die Lösung dieses Problems eindeutig bestimmt.

Satz 12.1 *Seien die Voraussetzungen (12.1) und (12.2) erfüllt. Dann gilt für die Lösung u_h von (12.3) und für beliebiges $\tilde{u} \in V_h$ die Abschätzung*

$$\begin{aligned} \|\tilde{u} - u_h\|_h &\leq c \inf_{v_h \in S_h} \left\{ \|\tilde{u} - v_h\|_h + \sup_{w_h \in S_h} \frac{|\tilde{a}_h(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_h} \right\} \\ &\quad + c \sup_{w_h \in S_h} \frac{|\tilde{a}_h(\tilde{u}, w_h) - f_h(w_h)|}{\|w_h\|_h} \end{aligned}$$

mit $c = c(m, M)$.

Beweis: Nach (12.1) gibt es zu beliebigem $v_h \in S_h$ ein $w_h \in S_h$ mit $\|w_h\|_h = 1$ und

$$m \|u_h - v_h\|_h \leq a_h(u_h - v_h, w_h).$$

Mit der Definition von u_h aus (12.3) folgt daraus

$$m \|u_h - v_h\|_h \leq f_h(w_h) - a_h(v_h, w_h) + \tilde{a}_h(v_h, w_h) + \tilde{a}_h(\tilde{u} - v_h, w_h) - \tilde{a}_h(\tilde{u}, w_h).$$

Aus (12.2) und $\|w_h\|_h = 1$ folgt

$$\tilde{a}_h(\tilde{u} - v_h, w_h) \leq M \|\tilde{u} - v_h\|_h.$$

Durch entsprechende Gruppierung der Terme erhält man (beachte $\|w_h/\|w_h\|_h\|_h = 1$)

$$\begin{aligned} m \|u_h - v_h\|_h &\leq M \|\tilde{u} - v_h\|_h + \sup_{w_h \in S_h} \frac{|\tilde{a}_h(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_h} \\ &\quad + \sup_{w_h \in S_h} \frac{|\tilde{a}_h(\tilde{u}, w_h) - f_h(w_h)|}{\|w_h\|_h}. \end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung

$$\|\tilde{u} - u_h\|_h \leq \|\tilde{u} - v_h\|_h + \|u_h - v_h\|_h$$

und Einsetzen der obigen Abschätzung folgt die Behauptung. \blacksquare

Ein häufig vorkommender Spezialfall dieses Satzes liegt vor, wenn die Steifigkeitsmatrix gleichmäßig positiv definit ist, also die Bedingung

$$m \|v_h\|_h^2 \leq a_h(v_h, v_h) \quad \forall v_h \in S_h \quad (12.4)$$

erfüllt ist. Indem man (12.4) durch $\|v_h\|_h$ dividiert, sieht man sofort, dass diese Bedingung (12.1) impliziert.

Falls das kontinuierliche Problem ebenfalls mit der Bilinearform $\tilde{a}_h(\cdot, \cdot)$ definiert ist, so kann der Term

$$\sup_{w_h \in S_h} \frac{|\tilde{a}_h(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_h}$$

als Konsistenz der Bilinearformen angesehen werden und der Term

$$\sup_{w_h \in S_h} \frac{|\tilde{a}_h(\tilde{u}, w_h) - f_h(w_h)|}{\|w_h\|_h}$$

als Konsistenz der rechten Seiten.

Falls ein konformer Finite-Element-Raum vorliegt, also $S_h \subset V$ und $\|\cdot\|_h = \|\cdot\|_V$, der Raum V_h nicht von h abhängt und ein kontinuierliches Problem der Form

$$\tilde{a}(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V$$

gestellt ist, so reduziert sich der Konvergenzsatz zum sogenannten ersten Lemma von Strang.

Satz 12.2 Erstes Strang-Lemma. *Unter den eben genannten Voraussetzungen gilt*

$$\begin{aligned} \|\tilde{u} - u_h\|_V &\leq c \inf_{v_h \in S_h} \left\{ \|\tilde{u} - v_h\|_V + \sup_{w_h \in S_h} \frac{|\tilde{a}_h(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_V} \right\} \\ &\quad + c \sup_{w_h \in S_h} \frac{|f(w_h) - f_h(w_h)|}{\|w_h\|_V}. \end{aligned}$$

12.2 Lineare Finite-Element-Methoden auf nicht polyhedral berandeten Gebieten

Als erste Anwendung der abstrakten Theorie betrachten wir lineare Finite-Element-Methoden zur Lösung elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$, eine beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand, der nicht notwendig polyhedral sein muss. Sei

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (12.5)$$

wobei der Operator

$$Lu = -\nabla \cdot (A\nabla u)$$

mit

$$A(\mathbf{x}) = (a_{ij}(\mathbf{x}))_{i,j=1}^d, \quad a_{ij} \in W^{1,p}(\Omega), p > d, \quad (12.6)$$

gegeben ist. Es wird vorausgesetzt, dass es zwei positive reelle Zahlen m, M gibt mit

$$m \|\xi\|_2^2 \leq \xi^T A(\mathbf{x}) \xi \leq M \|\xi\|_2^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (12.7)$$

Nach einer Sobolev-Ungleichung gilt $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$. Mit

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (A(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhält man

$$|a(u, v)| \leq \|A\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

für alle $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Ebenso folgt

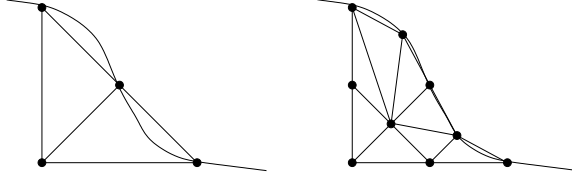
$$m \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq a(u, u) \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Damit ist die Bilinearform beschränkt und elliptisch. Aus dem Satz von Lax-Milgram folgt, dass die (schwache) Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ zu (12.5) mit

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

eindeutig existiert.

Sei \mathcal{T}_h eine reguläre Triangulierung aus Simplizes K , deren Ecken in $\overline{\Omega}$ liegen und definiere $\overline{\Omega}_h = \cup K$.



Der Raum der stückweise linearen und stetigen Funktionen, die auf dem Rand von Ω_h verschwinden, wird mit P_1 bezeichnet. Wir setzen voraus, dass es für die Daten des zu approximierenden Problems a_{ij}, f Fortsetzungen $\tilde{a}_{ij}, \tilde{f}$ auf ein größeres Gebiet $\tilde{\Omega} \supset \overline{\Omega}_h$ gibt mit

$$\|\tilde{a}_{ij}\|_{W^{1,p}(\tilde{\Omega})} \leq c \|a_{ij}\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \|\tilde{f}\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (12.8)$$

Ferner wird vorausgesetzt, dass die fortgesetzten Koeffizienten \tilde{a}_{ij} der Elliptizitätsbedingung (12.7) auf $\tilde{\Omega}$ genügen.

Offenbar kann f einfach mit Null fortgesetzt werden. Bei der Fortsetzung der a_{ij} muss man die schwache Differenzierbarkeit erhalten. Dies ist möglich, jedoch kompliziert, siehe Literatur.

Die Finite-Element-Methode ist nun definiert durch: Gesucht ist $u_h \in P_1$ mit

$$a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h) \quad \forall v_h \in P_1,$$

wobei

$$a_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega_h} \left(\tilde{A}(\mathbf{x}) \nabla u_h(\mathbf{x}) \right) \cdot \nabla v_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad f_h(v_h) = \int_{\Omega_h} \tilde{f}(\mathbf{x}) v_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

In der Praxis wird man diese Methode so nicht anwenden, da man aus der Existenz des Fortsetzungsoperators für a_{ij} ja noch lange nicht weiss, wie man diesen tatsächlich berechnen kann. Eine Alternative ist die Verwendung von Quadraturformeln, deren Quadraturpunkte nur innerhalb von $\overline{\Omega}$ liegen, siehe Literatur. Oft ist es in der Praxis auch so, dass die Koeffizienten a_{ij} konstant oder zumindest stückweise konstant sind. Dann ist ihre Fortsetzung wiederum trivial.

Das Ziel besteht darin, die lineare Konvergenz des Finite-Element-Verfahrens in $\|\cdot\|_h = \|\cdot\|_{H^1(\Omega_h)}$ zu beweisen. Dabei muss berücksichtigt werden, dass im allgemeinen weder $\Omega_h \subset \Omega$ noch $\Omega \subset \Omega_h$ gilt. Wir setzen voraus, dass es eine Fortsetzung $\tilde{u} \in H^2(\tilde{\Omega})$ von u gibt mit

$$\|\tilde{u}\|_{H^2(\tilde{\Omega})} \leq c \|u\|_{H^2(\Omega)}. \quad (12.9)$$

Ferner wird vorausgesetzt, dass Ω_h das Originalgebiet Ω hinreichend gut approximiert, in dem Sinne dass

$$\max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega_h} \text{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega) \leq ch^2 \quad (12.10)$$

gilt. Für $d = 2$ ist diese Bedingung erfüllt, wenn der Rand von Ω stückweise C^2 ist und die Ecken von Ω Knotenpunkte der Triangulierung sind. In diesem Fall kann nämlich das Koordinatensystem lokal gedreht werden, so dass der Abstand zwischen $\partial\Omega$ und $\partial\Omega_h$ als Fehler eines eindimensionalen Interpolationsproblems mit stetigen, stückweise linearen Finite-Elementen dargestellt wird. Nach bekannten Fehlerabschätzungen für solche Probleme, siehe Literatur, kann der Fehler durch ch^2 abgeschätzt werden. (Das sollte im Detail in [GRT93] stehen.) Bei dreidimensionalen Gebieten mit stückweise C^∞ -Rand benötigt man zusätzlich eine analoge Glattheitsbedingungen für die Kanten.

Wir beginnen den Beweis mit einem Lemma.

Lemma 12.3 Sei Bedingung (12.10) erfüllt. Für alle $v \in W^{1,1}(\Omega)$ gilt dann die Abschätzung

$$\int_{\Omega_s} |v(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \leq ch^2 \int_{\Omega} (|v(\mathbf{x})| + \|\nabla v(\mathbf{x})\|_2) \, d\mathbf{x},$$

wobei Ω_s eine der Mengen $\Omega \setminus \Omega_h$ oder $\Omega_h \setminus \Omega$ bezeichnet.

Beweis: Zuerst wird eine eindimensionale Abschätzung gezeigt. Für $f \in C^1([0, 1])$ erhält man aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$f(x) = \int_y^x f'(\xi) \, d\xi + f(y) \quad \forall x, y \in [0, 1],$$

woraus

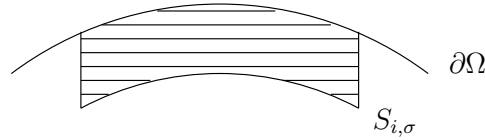
$$|f(x)| \leq \int_0^1 |f'(\xi)| \, d\xi + |f(y)|$$

folgt. Diese Beziehung wird bezüglich y in $[0, 1]$ integriert und bezüglich x in $[0, a]$ mit $a \in (0, 1]$. Man erhält

$$\int_0^a |f(x)| \, dx \leq a \int_0^1 |f'(\xi)| \, d\xi + a \int_0^1 |f(y)| \, dy = a \int_0^1 (|f(x)| + |f'(x)|) \, dx. \quad (12.11)$$

Wir betrachten den Fall $\Omega_s = \Omega \setminus \Omega_h$. Da Ω ein Lipschitz-Gebiet ist, kann man zeigen, dass $\partial\Omega$ sich mit endlich vielen offenen Mengen U_1, \dots, U_N überdecken lässt. Dann kann nach einer Drehung des Koordinatensystems $\partial\Omega \cap U_i$ als eine Lipschitz-Funktion g_i der $d-1$ Variablen $\mathbf{y}' = (y_1, \dots, y_{d-1}) \in U'_i \subset \mathbb{R}^{d-1}$ dargestellt werden. Wir werden jetzt Mengen konstruieren, deren Vereinigung die Differenz $\Omega \setminus \Omega_h$ überdeckt. Sei

$$S_{i,\sigma} = \{(\mathbf{y}', y_d) : g_i(\mathbf{y}') - \sigma < y_d < g_i(\mathbf{y}'), \mathbf{y}' \in U'_i\}.$$



$$\text{----- } U'_i$$

Dann gilt $(\Omega \setminus \Omega_h) \cap U'_i \subset S_{i,c_1 h^2}$, wobei c_1 von g_i , aber nicht von h abhängt. Ferner gibt es ein σ_0 , so dass $S_{i,\sigma_0} \subset \Omega$ für alle i .

Transformation (12.11) auf das Intervall $[0, \sigma_0]$ liefert für genügend kleines h

$$\int_0^{c_1 h^2} |f(x)| \, dx \leq ch^2 \int_0^{\sigma_0} (|f(x)| + |f'(x)|) \, dx.$$

Für $v \in C^1(\overline{\Omega})$ wird die Abschätzung auf die gedrehte Funktion $v(\mathbf{y}', x)$ angewandt und man erhält mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_{S_{i,c_1 h^2}} |v(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} &= \int_{U'_i} \int_0^{c_1 h^2} |v(\mathbf{y}', x)| \, dx \, d\mathbf{y}' \\ &\leq ch^2 \int_{U'_i} \int_0^{\sigma_0} (|\partial_x v(\mathbf{y}', x)| + |v(\mathbf{y}', x)|) \, dx \, d\mathbf{y}' \\ &\leq ch^2 \int_{\Omega} (|\partial_{y_d} v(\mathbf{y})| + |v(\mathbf{y})|) \, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Summation über i beweist das Lemma für Funktionen aus $C^1(\bar{\Omega})$. Da $C^1(\bar{\Omega})$ dicht in $W^{1,1}(\Omega)$ ist, gilt es auch für $v \in W^{1,1}(\Omega)$.

Der Fall $\Omega_s = \Omega_h \setminus \Omega$ kann analog bewiesen werden. ■

Zum Beweis der Konvergenzaussage wird der abstrakte Konvergenzsatz verwendet. Man wählt $S_h = P_1$, $V_h = H^1(\Omega_h)$, $\|\cdot\|_h = \|\cdot\|_{H^1(\Omega_h)}$ und

$$a_h(u, v) = \tilde{a}_h(u, v) = \int_{\Omega_h} \left(\tilde{A}(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) \right) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Mit dieser Wahl von $a_h(\cdot, \cdot)$ und $\tilde{a}_h(\cdot, \cdot)$ verschwindet der mittlere Term in der abstrakten Fehlerabschätzung und man muss nur den letzten Term abschätzen. Die Regularität und die Beschränktheit von $a_h(\cdot, \cdot)$ lassen sich leicht mit der Elliptizität und der Beschränktheit der Koeffizienten $\tilde{a}_{ij}(\mathbf{x})$ nachweisen. Im abstrakten Konvergenzsatz setzt man $v_h = I_h \tilde{u}$ und man erhält aus der Interpolationsfehlerabschätzung und (12.9)

$$\|\tilde{u} - I_h \tilde{u}\|_{H^1(\Omega_h)} \leq ch \|D^2 \tilde{u}\|_{L^2(\Omega_h)} \leq ch \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

Zur Behandlung des letzten Terms in der abstrakten Konvergenzabschätzung wird partielle Integration verwendet

$$a_h(\tilde{u}, w_h) = \int_{\Omega_h} \left(\tilde{A}(\mathbf{x}) \nabla \tilde{u}(\mathbf{x}) \right) \cdot \nabla w_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_h} g(\mathbf{x}) w_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

mit $g(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot (\tilde{A} \nabla \tilde{u})(\mathbf{x})$. Wegen $g = \tilde{f} = f$ in Ω ist

$$a_h(\tilde{u}, w_h) - f_h(w_h) = \int_{\Omega_h \setminus \Omega} \left(g(\mathbf{x}) - \tilde{f}(\mathbf{x}) \right) w_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Durch Fortsetzung von w_h durch Null auf $\Omega \setminus \Omega_h$ folgt aus dem obigen Lemma

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h \setminus \Omega} |w_h(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} &\leq ch^2 \int_{\Omega} \left(\|\nabla w_h(\mathbf{x})\|_2^2 + |w_h(\mathbf{x})|^2 \right) \, d\mathbf{x} \\ &\leq ch^2 \int_{\Omega_h} \left(\|\nabla w_h(\mathbf{x})\|_2^2 + |w_h(\mathbf{x})|^2 \right) \, d\mathbf{x} = ch^2 \|w_h\|_{H^1(\Omega_h)}^2. \end{aligned}$$

Mit der Cauchy–Schwarz–Ungleichung und der Dreiecksungleichung gilt

$$\begin{aligned} |a_h(\tilde{u}, w_h) - f_h(w_h)| &\leq \left\| g - \tilde{f} \right\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)} \|w_h\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)} \\ &\leq ch \left(\|g\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \left\| \tilde{f} \right\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \right) \|w_h\|_{H^1(\Omega_h)}. \end{aligned}$$

Nun muss noch $\|g\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ abgeschätzt werden. Mit der Produktregel und der Dreiecksungleichung folgt

$$\left\| \nabla \cdot (\tilde{A} \nabla \tilde{u}) \right\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \left\| \sum_{i,j=1}^d \tilde{a}_{ij} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \left\| (\nabla \cdot \tilde{A}) \cdot \nabla \tilde{u} \right\|_{L^2(\tilde{\Omega})}.$$

Wegen der Sobolev–Einbettung $W^{1,p}(\tilde{\Omega}) \rightarrow L^\infty(\tilde{\Omega})$ für $p > d$ folgt $\left\| \tilde{A} \right\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \leq c$ und damit für den ersten Term

$$\left\| \sum_{i,j=1}^d \tilde{a}_{ij} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq c \|D^2 \tilde{u}\|_{L^2(\tilde{\Omega})}.$$

Zur Abschätzung des zweiten Terms nutzt man die Höldersche Ungleichung *Übungsaufgabe*

$$\left\| \left(\nabla \cdot \tilde{A} \right) \cdot \nabla \tilde{u} \right\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \left\| \nabla \cdot \tilde{A} \right\|_{L^p(\tilde{\Omega})}^2 \left\| \nabla \tilde{u} \right\|_{L^{2p/(p-2)}(\tilde{\Omega})}^2 \leq c \left\| \nabla \tilde{u} \right\|_{L^{2p/(p-2)}(\tilde{\Omega})}^2.$$

Wegen $2p/(p-2) < 2d/(d-2)$ für $p > d$ und der Sobolev-Ungleichung kann man schließlich noch

$$\left\| \nabla \tilde{u} \right\|_{L^{2p/(p-2)}(\tilde{\Omega})} \leq c \left\| \tilde{u} \right\|_{H^2(\tilde{\Omega})}$$

abschätzen. Setzt man diese Abschätzungen ein, erhält man mit (12.8) und (12.9)

$$\begin{aligned} |a_h(\tilde{u}, w_h) - f_h(w_h)| &\leq ch \left(\left\| \tilde{u} \right\|_{H^2(\tilde{\Omega})} + \left\| \tilde{f} \right\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \right) \left\| w_h \right\|_{H^1(\Omega_h)} \\ &\leq ch \left(\left\| u \right\|_{H^2(\Omega)} + \left\| f \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \left\| w_h \right\|_{H^1(\Omega_h)} \\ &\leq ch \left\| u \right\|_{H^2(\Omega)} \left\| w_h \right\|_{H^1(\Omega_h)}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt nutze man die Darstellung von f aus (12.5), mit welcher man eine analoge Abschätzung wie für g durchführen kann. Damit ist die lineare Konvergenz bewiesen.

Satz 12.4 *Seien die Voraussetzungen (12.6), (12.7), (12.8), (12.9) und (12.10) erfüllt. Dann gilt die Fehlerabschätzung*

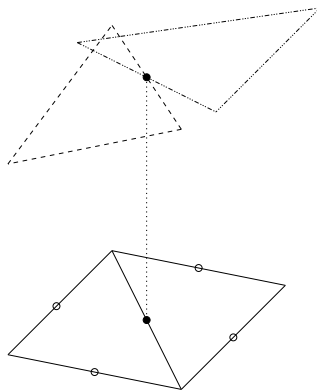
$$\left\| \tilde{u} - u_h \right\|_{H^1(\Omega_h)} \leq ch \left\| u \right\|_{H^2(\Omega)},$$

wobei c nicht von u , f und h abhängt.

12.3 Finite-Element-Methode mit dem nichtkonformen Crouzeix-Raviart-Element

Das nichtkonforme Crouzeix-Raviart-Finite-Element wurde im Abschnitt 10.4 eingeführt. Wegen der einfacheren Darstellung wollen wir uns hier auf den zweidimensionalen Fall beschränken. Um nicht zusätzlich einen Gebietsapproximationsfehler untersuchen zu müssen, setzen wir voraus, dass Ω ein konvexes, polygonal berandetes Gebiet ist.

Sei \mathcal{T}_h eine reguläre Triangulierung von Ω mit Dreiecken. Mit P_1^{nc} (nc – non conforming) bezeichnen wir den Finite-Element-Raum der stückweise linearen Finite-Elemente, die in den Kantenmitten stetig sind (Crouzeix-Raviart). Dieser Raum ist erstens nichtkonform bei der Diskretisierung von elliptischen Problemen zweiter Ordnung, da das stetige Problem im $H_0^1(\Omega)$ formuliert ist und die Funktionen in diesem Raum stetig in Ω sind. Die Funktionen in P_1^{nc} sind nicht stetig und nicht schwach differenzierbar. Zweitens ist der Raum nichtkonform bezüglich der Randbedingung, die nicht exakt erfüllt wird. Die Funktionen aus P_1^{nc} verschwinden in allen Kantenmittelpunkten auf dem Rand. In den anderen Randpunkten nehmen sie jedoch im allgemeinen nicht den Wert Null an.



Die Bilinearform

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (A(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

wird auf $H_0^1(\Omega) + P_1^{\text{nc}}$ fortgesetzt durch

$$a_h(u, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (A(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega) + P_1^{\text{nc}}.$$

Damit ist das nichtkonforme Finite-Element-Verfahren definiert durch: Finde $u_h \in P_1^{\text{nc}}$ mit

$$a_h(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in P_1^{\text{nc}}.$$

Für dieses Verfahren wollen wir die lineare Konvergenz in h bezüglich der sogenannten Energie-Norm $\|\cdot\|_h = (a_h(\cdot, \cdot))^{1/2}$ zeigen. Wir setzen voraus, dass für die Lösung des stetigen Problems (12.5) gilt $u \in H^2(\Omega)$ und dass die Koeffizienten a_{ij} differenzierbar sind mit beschränkten Ableitungen.

Als erstes wollen wir eine Gleichung für den Fehler herleiten. Dazu wird das stetige Problem (12.5) mit einer Testfunktion $v_h \in P_1^{\text{nc}}$ multipliziert, das Produkt wird über Ω integriert und dann partielle Integration über die einzelnen Dreiecke angewandt:

$$\begin{aligned} (f, v_h) &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \cdot (A(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) v_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (A(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) \cdot \nabla v_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (A(s) \nabla u(s)) \cdot \mathbf{n}_K(s) v_h(s) \, ds \\ &= a_h(u, v_h) - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (A(s) \nabla u(s)) \cdot \mathbf{n}_K(s) v_h(s) \, ds, \end{aligned}$$

wobei \mathbf{n}_K die nach außen gerichtete Einheitsnormale an die Kanten der Dreiecke ist. Nun erhält man durch Subtraktion der Finite-Element-Gleichung

$$a_h(u - u_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (A(s) \nabla u(s)) \cdot \mathbf{n}_K(s) v_h(s) \, ds \quad \forall v_h \in P_1^{\text{nc}}.$$

Die rechte Seite dieser Fehlergleichung zeigt, dass man bei nichtkonformen Finite-Elementen im Grunde genommen eine gestörte Gleichung diskretisiert. Das nächste Lemma gibt eine Abschätzung für diese Störung.

Lemma 12.5 Seien $u \in H^2(\Omega)$ und $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Dann gilt

$$\left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} A(s) \nabla u(s) \cdot \mathbf{n}_K(s) v_h(s) ds \right| \leq ch \|u\|_{H^2(\Omega)} \|v_h\|_h.$$

Beweis: Jede im Inneren von Ω gelegene Kante der Triangulierung kommt in den Randintegralen über ∂K genau zweimal vor, wobei der zugehörige Normaleneinheitsvektor jeweils entgegengesetztes Vorzeichen besitzt. Man kann daher für jede Kante eine Einheitsnormale fixieren und die Randintegrale in der Form

$$\sum_E \int_E [(A(s) \nabla u(s)) \cdot \mathbf{n}_E(s) v_h(s)]_E ds = \sum_E \int_E (A(s) \nabla u(s)) \cdot \mathbf{n}_E(s) [v_h]_E(s) ds$$

schreiben, wobei die Summation über alle Kanten E erfolgt, und $[v_h]_E$ den Sprung von v_h bezeichnet

$$[v_h]_E(s) = \begin{cases} v_h|_{K_1}(s) - v_h|_{K_2}(s) & s \in E \subset \Omega, \\ v_h(s) & s \in E \subset \partial\Omega, \end{cases}$$

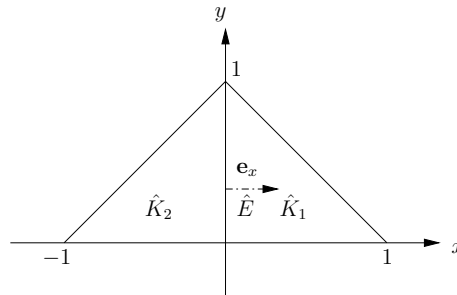
wobei \mathbf{n}_E von K_1 nach K_2 gerichtet, beziehungsweise die Außennormale an $\partial\Omega$ ist. Bei dieser Schreibweise wurde ausgenutzt, dass sowohl ∇u , $A(s)$ als auch $\mathbf{n}_E(s)$ fast überall stetig sind und damit als Faktor aus dem Sprung herausgezogen werden können. Auf Grund der Stetigkeitsbedingungen an die Funktionen aus P_1^{nc} beziehungsweise der Nullrandbedingungen gilt $[v_h]_E(P) = 0$ für alle Seitenmitten P . Damit folgt (Bild in der Vorlesung)

$$\int_E [v_h]_E(s) ds = 0 \quad \forall E.$$

Sei E eine beliebige im Inneren von Ω gelegene Kante mit den anliegenden Dreiecken K_1 und K_2 . Als nächstes wollen wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left| \int_E (A(s) \nabla u(s)) \cdot \mathbf{n}_E(s) [v_h]_E(s) ds \right| \\ & \leq ch \|u\|_{H^2(K_1)} \left(\|\nabla v_h\|_{L^2(K_1)} + \|\nabla v_h\|_{L^2(K_2)} \right) \end{aligned} \quad (12.12)$$

beweisen. Dazu verwendet man eine Referenzkonfiguration $(\hat{K}_1, \hat{K}_2, \hat{E})$, wobei \hat{K}_1 das Einheitsdreieck und \hat{K}_2 das an der y -Achse gespiegelte Einheitsdreieck ist, \hat{E} ist dann die gemeinsame Kante dieser Dreiecke (Intervall $(0, 1)$ auf der y -Achse). Die Normalen an \hat{E} wird mit dem Einheitsvektor \mathbf{e}_x festgelegt. Diese Referenzkonfiguration lässt sich durch eine stetige, auf jedem \hat{K}_i lineare Abbildung auf das Tripel (K_1, K_2, E) abbilden. Für diese Abbildung gelten die im Abschnitt 11.1.2 bewiesenen Transformationsregeln.



Mit dem Verschwinden des Integrals von $[v_h]_E$ über die Kanten und dem Spursatz erhält man für jede beliebige Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_{\hat{E}} \left(\hat{A}(\hat{s}) \nabla \hat{u}(\hat{s}) \right) \cdot \mathbf{e}_x [\hat{v}_{h,1}]_E \, d\hat{s} &= \int_{\hat{E}} \left(\left(\hat{A}(\hat{s}) \nabla \hat{u}(\hat{s}) \right) \cdot \mathbf{e}_x - \alpha \right) [\hat{v}_{h,1}]_E \, d\hat{s} \\ &\leq c \left\| \left(\hat{A} \nabla \hat{u} \right) \cdot \mathbf{e}_x - \alpha \right\|_{H^1(\hat{K}_1)} \left\| [\hat{v}_{h,1}]_E \right\|_{L^2(\hat{E})}. \end{aligned}$$

Insbesondere kann man α so wählen, dass

$$\int_{\hat{E}} \left(\hat{A}(\hat{s}) \nabla \hat{u}(\hat{s}) \right) \cdot \mathbf{e}_x - \alpha \, d\hat{s} = 0.$$

Den L^2 -Anteil des ersten Faktors schätzen wir mit der im Lemma 11.2 bewiesenen Ungleichung (für $k = 0, l = 1$) ab

$$\begin{aligned} \left\| \left(\hat{A} \nabla \hat{u} \right) \cdot \mathbf{e}_x - \alpha \right\|_{H^1(\hat{K}_1)} &\leq c \left\| \nabla \left(\left(\hat{A} \nabla \hat{u} \right) \cdot \mathbf{e}_x - \alpha \right) \right\|_{L^2(\hat{K}_1)} \\ &= c \left\| \nabla \left(\left(\hat{A} \nabla \hat{u} \right) \cdot \mathbf{e}_x \right) \right\|_{L^2(\hat{K}_1)}. \end{aligned}$$

Für den zweiten Faktor verwendet man den Spursatz

$$\begin{aligned} \left\| [\hat{v}_{h,1}]_E \right\|_{L^2(\hat{E})} &\leq c \left(\|\hat{v}_h\|_{H^1(\hat{K}_1)} + \|\hat{v}_h\|_{H^1(\hat{K}_2)} \right) \\ &\leq c \left(\|\nabla \hat{v}_h\|_{L^2(\hat{K}_1)} + \|\nabla \hat{v}_h\|_{L^2(\hat{K}_2)} \right). \end{aligned}$$

In der letzten Zeile stehen zunächst nur Halbnormen. Um die Gültigkeit der letzten Abschätzung zu zeigen, muss bewiesen werden, dass das sogar Normen sind. Dann folgt diese Abschätzung aus der Normäquivalenz in endlichdimensionalen Räumen. Sei die rechte Seite gleich Null, so folgt $\hat{v}_h = c_1$ in \hat{K}_1 und $\hat{v}_h = c_2$ in \hat{K}_2 . Nun ist aber \hat{v}_h im Mittelpunkt von \hat{E} stetig, woraus $c_1 = c_2$ folgt und daraus $[\hat{v}_h]_E = 0$, also ist auch die linke Seite gleich Null. Daher definiert die letzte Zeile eine Norm auf dem Quotientenraum bezüglich $[\hat{v}_h]_E = 0$ und die Ungleichung für $\left\| [\hat{v}_{h,1}]_E \right\|_{L^2(\hat{E})}$ gilt in der angegebenen Form.

Insgesamt haben wir auf der Referenzkonfiguration

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\hat{E}} \left(\hat{A}(\hat{s}) \nabla u(\hat{s}) \right) \cdot \mathbf{e}_x [\hat{v}_{h,1}]_E \, d\hat{s} \right| \\ &\leq c \left\| \nabla \left(\left(\hat{A} \nabla u \right) \cdot \mathbf{e}_x \right) \right\|_{L^2(\hat{K}_1)} \left(\|\nabla \hat{v}_h\|_{L^2(\hat{K}_1)} + \|\nabla \hat{v}_h\|_{L^2(\hat{K}_2)} \right) \end{aligned}$$

zeigt. Diese Abschätzung wird auf das Tripel (K_1, K_2, E) transformiert. Dabei erhält man für das Kantenintegral den Faktor c (ch für ∇ und ch^{-1} für $d\hat{s}$). Für das Produkt der Normen auf der rechten Seite bekommt man den Faktor ch (ch für den ersten Faktor und c für den zweiten Faktor). Dann nutzt man noch, dass sowohl A als auch alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von $A(s)$ beschränkt sind. Damit ist (12.12) bewiesen.

Die Behauptung des Lemmas erhält man, indem man über alle Kanten summiert und auf der rechten Seite noch die Cauchy–Schwarz–Ungleichung anwendet. ■

Mit Hilfe des Lemmas folgt aus der Fehlergleichung

$$|a_h(u - u_h, v_h)| \leq ch \|u\|_{H^2(\Omega)} \|v_h\|_h.$$

Damit ergibt sich folgende Fehlerabschätzung:

Satz 12.6 *Seien die Voraussetzungen analog zum vorangegangenen Lemma. Dann gilt*

$$\|u - u_h\|_h^2 \leq ch \|u\|_{H^2(\Omega)} \|u - u_h\|_h + ch^2 \|u\|_{H^2(\Omega)}^2.$$

Beweis: Sei $I_h : H_0^1(\Omega) \rightarrow P_1^{\text{nc}}$ der Interpolationsoperator. Dann gilt mit Hilfe der eben bewiesenen Abschätzung sowie der Abschätzung für den Interpolationsfehler

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_h^2 &= a_h(u - u_h, u - u_h) = a_h(u - u_h, u - I_h u) + a_h(u - u_h, I_h u - u_h) \\ &\leq |a_h(u - u_h, u - I_h u)| + ch \|u\|_{H^2(\Omega)} \|I_h u - u_h\|_h \\ &\leq \|u - u_h\|_h \|u - I_h u\|_h + ch \|u\|_{H^2(\Omega)} (\|I_h u - u\|_h + \|u - u_h\|_h) \\ &\leq ch \|u - u_h\|_h \|u\|_{H^2(\Omega)} + ch \|u\|_{H^2(\Omega)} (h \|u\|_{H^2(\Omega)} + \|u - u_h\|_h). \end{aligned}$$

■

Für h klein genug, ist der zweite Term in der Fehlerabschätzung von höherer Ordnung und kann in die Konstante des ersten Terms gesteckt werden. Man erhält also asymptotisch die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_h \leq ch \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

12.4 $L^2(\Omega)$ –Fehlerabschätzungen

Man nennt ein Verfahren quasi-optimal in einer Norm, wenn die Ordnung des Verfahrensfehlers mit der bestmöglichen Approximationsordnung übereinstimmt. Schon in einer Raumdimension kann man höchstens lineare Konvergenz in $H^1(\Omega)$ für die Bestapproximierende im Raum der stetigen, stückweise linearen Polynome erzielen, wie schon das Beispiel $v(x) = x^2$ zeigt. Damit sind alle bisher betrachteten Verfahren quasi-optimal in der Energienorm. Da der Interpolationsfehler in $L^2(\Omega)$ eine Ordnung besser ist als in $H^1(\Omega)$, stellt sich die Frage, ob man für Finite-Element-Methoden in $L^2(\Omega)$ ein besseres Konvergenzresultat bekommen kann.

Vom Standpunkt der klassischen Analysis scheint eine solche höhere Fehlerordnung unwahrscheinlich zu sein, dass das Finite-Element-Verfahren bei nicht gleichförmiger Triangulierung nur von erster Ordnung konsistent ist und es bei den Finite-Differenzen-Verfahren kein Beispiel gibt, bei dem die Konvergenzordnung die Konsistenzordnung übertrifft. In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass man bei Finite-Element-Verfahren trotzdem eine bessere Konvergenzordnung in $L^2(\Omega)$ als in $H^1(\Omega)$ bekommen kann. Allerdings ist die Quasi-Optimalität in $L^2(\Omega)$ nicht so sicher zu erreichen, wie eine Konvergenzordnung, die durch eine die Konsistenzordnung gestützt wird.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$, ein konvexes Polyedergebiet. Wir betrachten das Problem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (12.13)$$

Zur Gewinnung von $L^2(\Omega)$ –Fehlerabschätzungen spielt die Regularität des Problems eine entscheidende Rolle. Wir hatten auch schon früher z.B. $u \in H^2(\Omega)$ vorausgesetzt, ohne darauf einzugehen, wann gewisse Regularitätsforderungen erfüllt sind.

Definition 12.7 Sei L ein Differentialoperator zweiter Ordnung. Dieser heißt m –regulär, $m \geq 2$, wenn für alle $f \in H^{m-2}(\Omega)$ die Lösungen von $Lu = f$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega$, im Raum $H^m(\Omega)$ liegen und der Abschätzung

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} \leq c \|f\|_{H^{m-2}(\Omega)} + c \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad (12.14)$$

genügen.

Die Definition ist so formuliert, dass sie auch bei nichteindeutiger Lösung angewandt werden kann. Beim Laplace-Operator kann der Summand $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ durch $\|f\|_{L^2(\Omega)}$ abgeschätzt werden, so dass aus (12.14) folgt *Übungsaufgabe*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

In der Literatur sind viele Regularitätsresultate bekannt, die, grob gesprochen, darauf hinauslaufen, dass man Regularität hat, wenn die Daten des Problems (Koeffizienten des Operators, Rand des Gebiets) genügend glatt sind. Beispielsweise ist ein elliptischer Operator in Divergenzform ($\Delta = \nabla \cdot \nabla$) 2-regulär, wenn die Koeffizienten im Raum $W^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 1$, liegen und $\partial\Omega$ zweimal stetig differenzierbar ist. Ein anderes wichtiges Resultat ist die 2-Regulärheit des Laplace-Operators auf einem konvexen Gebiet. Weiterreichende Regularitätsresultate findet man insbesondere im Buch von Grisvard [Gri85].

Die Variationsgleichung zu (12.13) lautet: Finde $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Zur Diskretisierung verwenden wir den Raum P_1 der stetigen, stückweise linearen Finite-Elemente mit Nullrandbedingung. Sei $u_h \in P_1$ die Lösung des Problems

$$(\nabla u_h, \nabla v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in P_1. \quad (12.15)$$

Satz 12.8 Für die Lösungen der Probleme (12.13) und (12.15) gelten die Fehlerabschätzungen

$$\begin{aligned} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} &\leq ch \|f\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq ch^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Beweis: Aus der Regularitätstheorie ist bekannt, dass der Laplace-Operator auf konvexem Gebiet 2-regulär ist. Aus der Fehlerabschätzung in der $H^1(\Omega)$ -Norm und der 2-Regulärheit erhält man

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq ch \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq ch \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Zum Nachweis der $L^2(\Omega)$ -Fehlerabschätzung sei $w \in H_0^1(\Omega)$ die eindeutig bestimmte Lösung des Hilfsproblems (dualen Problems)

$$(\nabla v, \nabla w) = (u - u_h, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Für einen symmetrischen Differentialoperator hat das duale Problem die gleiche Gestalt wie das Originalproblem. Demzufolge ist das duale Problem auch 2-regulär und es gilt die Abschätzung

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Zur Abschätzung verwendet man die Galerkin-Orthogonalität des Fehlers

$$(\nabla(u - u_h), \nabla v_h) = (\nabla u, \nabla v_h) - (\nabla u_h, \nabla v_h) = (f, v_h) - (f, v_h) = 0$$

für alle $v_h \in P_1$. Nun nimmt man den Fehler $u - u_h$ als Testfunktion v im dualen Problem. Sei $I_h w$ die Interpolierte von w in P_1 . Mit der Galerkin-Orthogonalität, der Interpolationsabschätzung und der Regularität von w erhält man

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &= (\nabla(u - u_h), \nabla w) = (\nabla(u - u_h), \nabla(w - I_h w)) \\ &\leq \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(w - I_h w)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq ch \|w\|_{H^2(\Omega)} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq ch \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Jetzt dividiert man durch $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ und nutzt die bekannte Fehlerabschätzung für $\|\nabla u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ um den Beweis der Konvergenzaussage zu beenden. ■

12.5 Gemischte Randwertprobleme

In diesem Abschnitt werden Finite-Element-Methoden für das gemischte Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= g_D && \text{auf } \Gamma_D, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} &= \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g_N && \text{auf } \Gamma_N \end{aligned} \quad (12.16)$$

betrachtet. Dabei sind $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, \mathbf{n} die Einheitsaußennormale an Γ und wir nehmen an, dass $|\Gamma_D| > 0$, $|\Gamma_N| > 0$. Die Randbedingung auf Γ_N wird Neumann-Randbedingung genannt.

Sei Γ genügend glatt. Wir definieren die Räume

$$\begin{aligned} H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega) &= \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = 0\}, \\ H_{g_D,\Gamma_D}^1(\Omega) &= \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = g_D\}. \end{aligned}$$

Zunächst betrachten wir den Fall $g_D = g_N = 0$. Im Falle $g_N = 0$ spricht man auch von natürlichen Randbedingungen. Das zu (12.16) gehörige Variationsproblem lautet: Finde $u \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$ mit

$$\min_{v \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)} F(v) = \min_{v \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \|\nabla v(\mathbf{x})\|_2^2 - f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x}. \quad (12.17)$$

Im Falle $g_D = 0$ und $|\Gamma_D| > 0$ lässt sich eine Poincaré-Ungleichung der Gestalt

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$$

beweisen, siehe Lemma 4.14.

Nach dem Riesz'schen Darstellungssatz hat (12.17) eine eindeutige Lösung $u \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$, die durch die Variationsgleichung

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega) \quad (12.18)$$

gegeben ist. Das Erfülltsein der natürlichen Randbedingung ist in dieser Gleichung nicht offensichtlich. Um diese Randbedingung zu finden, nehmen wir an, dass $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Dann kann man in (12.18) für $v \in C_0^\infty(\Omega) \subset H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$ partielle Integration anwenden und erhält

$$(-\Delta u, v) = (f, v) \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Damit gilt $-\Delta u = f$ in Ω . Nun setzt man $v \in C_{0,\Gamma_D}^\infty(\Omega) \subset H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$ in (12.18) ein. Mit partieller Integration erhält man diesmal

$$(-\Delta u, v) + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{s})v(\mathbf{s}) d\mathbf{s} = (f, v) \quad \forall v \in C_{0,\Gamma_D}^\infty(\Omega).$$

Wegen $-\Delta u = f$ folgt hieraus

$$\int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{s})v(\mathbf{s}) d\mathbf{s} = 0 \quad \forall v \in C_{0,\Gamma_D}^\infty(\Omega)$$

und, sofern Γ_N glatt ist,

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_N.$$

Die natürliche Randbedingung wird also durch das Verschwinden des Randintegrals über Γ_N in der Variationsgleichung charakterisiert.

Seien g_D und g_N jetzt beliebig gegeben. Dann lautet das kontinuierliche Problem: Finde $u \in H_{g_D, \Gamma_D}^1(\Omega)$ mit

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v) + \int_{\Gamma_N} g_N(\mathbf{s})v(\mathbf{s}) \, ds \quad \forall v \in H_{0, \Gamma_D}^1(\Omega).$$

Bei dieser Variationsgleichung sind Ansatzraum und Testraum unterschiedlich.

Für die Fehlerabschätzung nehmen wir der Einfachheit halber an, dass Ω ein polygonal berandetes Gebiet ist und die Randstücke Γ_D und Γ_N ebenfalls von polygonaler Form sind (keine einzelnen Punkte etc.). Dann kann man Ω so triangulieren, dass die Ränder von Γ_D und Γ_N sich aus Seitenflächen von Gitterzellen zusammensetzen. Seien P_1 der Raum der stetigen, stückweise linearen Finite-Elemente auf dieser Triangulierung mit der Eigenschaft

$$v_h(V_i) = g_D(V_i) \quad \text{für alle Eckpunkte } V_i \in \Gamma_D$$

und $P_{1,0}$ der Raum der stetigen, stückweise linearen Finite-Elemente auf dieser Triangulierung mit der Eigenschaft

$$v_h(V_i) = 0 \quad \text{für alle Eckpunkte } V_i \in \Gamma_D.$$

Das Finite-Element-Verfahren ist dann definiert durch: Finde $u_h \in P_1$, so dass

$$(\nabla u_h, \nabla v_h) = (f, v_h) + \int_{\Gamma_N} g_N(\mathbf{s})v_h(\mathbf{s}) \, ds \quad \forall v_h \in P_{1,0}.$$

Ist $g_N \neq 0$, so besitzt die Finite-Element-Gleichung einen zusätzlichen Beitrag auf der rechten Seite des Gleichungssystems, der assembliert werden muss. Davon sind natürlich nur die Testfunktionen betroffen, die auf Γ_N nicht verschwinden.

Die Konvergenzabschätzung beginnt man wie üblich mit der Fehlergleichung, die man durch Subtraktion der Finite-Element-Gleichung von der kontinuierlichen Gleichung erhält

$$(\nabla(u - u_h), \nabla v_h) = 0 \quad \forall v_h \in P_{1,0}.$$

Da $I_h(u - u_h) \in P_{1,0}$, folgt durch Verwendung dieser Funktion in der Fehlergleichung, $I_h u_h = u_h$ und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= (\nabla(u - u_h), \nabla(u - u_h) - \nabla(I_h(u - u_h))) \\ &= (\nabla(u - u_h), \nabla(u - I_h u_h)) \\ &\leq \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u - I_h u_h)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Auf Grund der wechselnden Randbedingung, kann man im allgemeinen nicht erwarten, dass die Lösung des kontinuierlichen Problems im $H^2(\Omega)$ liegt. Daher wird die Interpolation nur eine reduzierte Konvergenzordnung aufweisen. Im Falle $d = 2$ und falls der Wechsel der Randbedingung auf einer Geraden erfolgt, sind die Fehlerabschätzungen

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} = c(u)h^{1/2}, \quad \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = c(u)h$$

optimal. Man hat also nur eine halb so große Konvergenzordnung wie bei reinen Dirichlet-Problemen.

Kapitel 13

Ausblick

13.1 Adaptive Finite-Element-Verfahren

Die bisher für Finite-Elemente-Methoden bewiesenen Fehlerabschätzungen haben die allgemeine Gestalt

$$\|u - u_h\| \leq ch^p \| |u| \| ,$$

wobei die Normen auf beiden Seiten der Ungleichung unterschiedlich sind. Diese sogenannten a priori Abschätzungen besitzen in der Praxis verschiedene Nachteile:

- Sie gelten teilweise erst, wenn h klein genug ist, also asymptotisch. Für ein gegebenes Problem, ein gegebenes Gitter und eine gegebene Finite-Elemente-Methode ist nicht klar, ob man überhaupt schon im Bereich dieser Asymptotik ist.
- Die Konstante c ist im allgemeinen nicht bekannt. Sie hängt vom Gebiet (Poincaré-Ungleichung), vom Gitter und dem Finite-Elemente-Raum ab.
- Die Norm $\| |u| \|$ ist nicht bekannt, da man u nicht kennt.
- Es ist im allgemeinen nicht einmal bekannt, ob die Lösung u so glatt ist, dass man eine quasi-optimale Konvergenzrate in $\| \cdot \|$ erwarten kann.

Aus diesen Gründen ist es erstrebenswert, wenn man eine Größe η berechnen könnte, die nur von u_h und den Daten des Problems abhängt, also von Größen, auf die man während der Rechnung zugreifen kann (a posteriori), für die gilt

$$\|u - u_h\| \leq c\eta,$$

wobei man die Größe von c auch etwa kennt. Die Zahl η nennt man globalen a posteriori Fehlerabschätzer.

Eine andere Einschränkung bei allen bisherigen Betrachtungen war die Untersuchung von nur uniformen Gittern. Oft ist es jedoch der Fall, dass die zu berechnende Lösung in einem großen Teil von Ω sich sehr gut mit stückweise Polynomen niedriger Ordnung beschreiben lässt, währenddessen sie in einem kleinen Teil $\omega \subset \Omega$ sehr große Ableitungen besitzen kann. In diesem Fall setzt sich der Fehler $\|u - u_h\|$ im wesentlichen aus den Anteilen aus ω zusammen. Es macht Sinn, wenn man in ω mehr Arbeit hineinsteckt als in den Rest des Gebietes, weil man damit die größte Fehlerreduktion erwarten kann. Diese Mehrarbeit kann zum Beispiel darin bestehen, dass man das Gitter nur in ω , eventuell mit einer kleinen Umgebung von ω , verfeinert und im übrigen Gebiet nicht. Um zu entscheiden, wo man verfeinern soll, braucht man Informationen über den lokalen Fehler, die man während der numerischen Simulation berechnen kann. Für jede Gitterzelle K benötigt man eine Zahl η_K , für die gilt

$$\eta_K \leq c_K \|u - u_h\|_{U(K)},$$

wobei $U(K)$ eine kleine Umgebung von K ist und die Konstanten für alle K etwa gleichgroß sein müssen. Ist solch eine Abschätzung möglich, dann ist man sicher, dass Gitterzellen mit dem größten η_K auch den größten lokalen Fehler besitzen. Die Zahlen η_K nennt man lokale a posteriori Fehlerschätzer.

Wir werden sehen, dass zwischen den beiden oben beschriebenen Aufgaben ein enger Zusammenhang besteht. Es stellt sich heraus, dass oft gilt

$$\eta = \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \eta_K^2 \right)^{1/2}.$$

Der Einfachheit halber betrachten wir das Modellproblem

$$-\Delta u = f \text{ in } \Omega, \quad u = 0 \text{ auf } \partial\Omega \quad (13.1)$$

in einem zweidimensionalen Gebiet sowie die Finite-Elemente-Methode mit $V_h = P_1$. Die schwache Formulierung ist: Finde $u \in V = H_0^1(\Omega)$ so dass

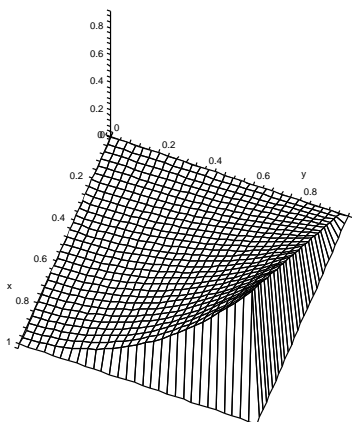
$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in V.$$

Der Raum V ist mit der Norm $\|v\|_V = \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$ ausgestattet, die im folgenden $H^1(\Omega)$ -Norm genannt wird.

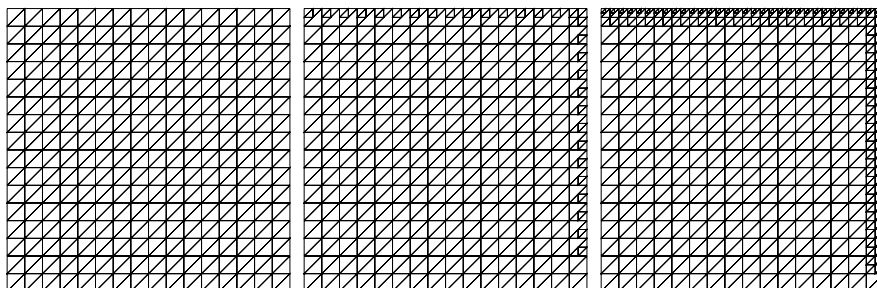
Beispiel 13.1 Die Laplace-Gleichung wird mit der vorgegebenen Lösung

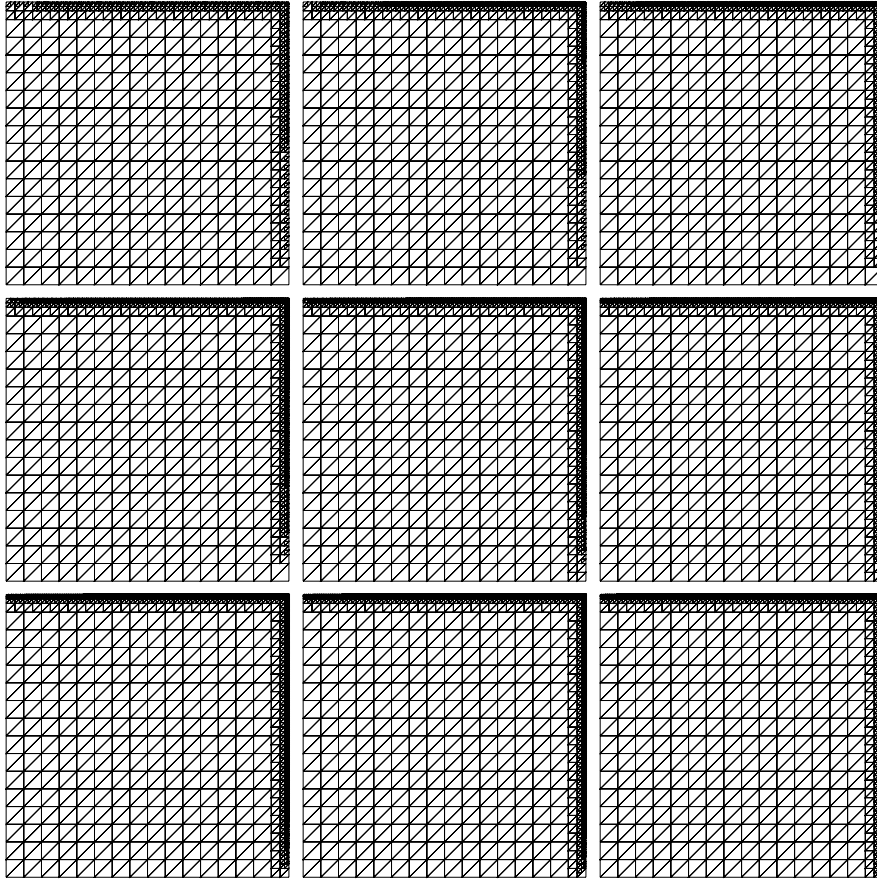
$$u(x, y) = xy^2 - y^2 e^{20000(x-1)} - x e^{30000(y-1)} + e^{20000x + 30000y - 50000}$$

gelöst.

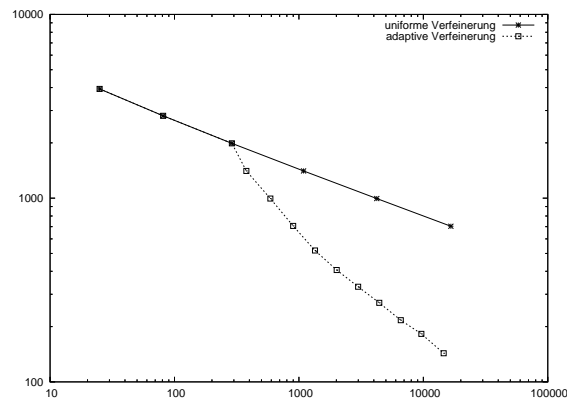


Das Charakteristikum dieser Lösung sind die schmalen und steilen Bereiche an den Rändern $x = 1$ und $y = 1$. In den nachfolgenden Bildern ist eine adaptive Gitterverfeinerung zu sehen, die mit einem sogenannten expliziten residuellen Fehlerschätzer generiert wurde:





Das feinste Gitter besitzt 14562 Freiheitsgrade. Die Fehlerentwicklung in der $H^1(\Omega)$ -Seminorm im Vergleich mit einer gleichmäßigen Verfeinerung ist in der folgenden Abbildung gezeigt:



Man erkennt deutlich die wesentlich bessere Fehlerreduktion auf dem adaptiv verfeinerten Gitter. \square

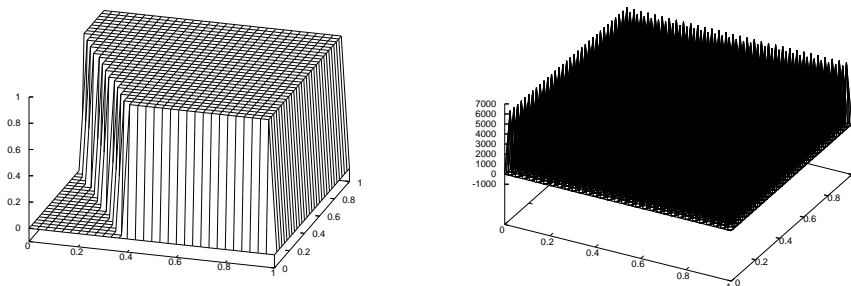
13.2 Konvektions–dominante Probleme

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$. Wir betrachten die Konvektions–Diffusions–Gleichung

$$\begin{aligned} -\varepsilon \Delta u + \mathbf{b} \cdot \nabla u &= f \quad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Diese Gleichung beschreibt den Transport eines Stoffes durch Diffusion (erster Term) und Konvektion (zweiter Term). Der Vektor \mathbf{b} ist beispielsweise ein Geschwindigkeitsfeld. Oft tritt der Fall auf, dass die Konvektion die Diffusion dominiert, d.h. $\|\mathbf{b}\|_{L^\infty(\Omega)} \gg \varepsilon > 0$. Dann kann man die normale Finite-Differenzen- oder Finite-Elemente-Methode nicht mehr verwenden.

Beispiel 13.2 Für die Konvektions-Diffusions-Gleichung mit $\Omega = (0, 1)^2$, $\varepsilon = 10^{-8}$, $\mathbf{b} = (\cos(-\pi/3), \sin(-\pi/3))^T$, $f = 0$ ist auf dem Bild links die Lösung zu sehen und rechts die Finite-Elemente-Lösung auf einem relativ groben Gitter ($h_x = h_y = 1/65$, P_1 -Finite-Elemente)



Die Finite-Elemente-Lösung ist unbrauchbar. □

Man benötigt neue Techniken zur Diskretisierung von konvektions-dominanten Gleichungen. Dies trifft auch für die Navier-Stokes-Gleichungen zu.

13.3 Sattelpunktprobleme

In diese Rubrik fallen beispielsweise die Stokes- und Navier-Stokes-Gleichungen. Die Stokes-Gleichungen besitzen die Gestalt

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{in } \Omega, \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \quad \text{in } \Omega, \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} \quad \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Man hat hier die Funktionen \mathbf{u} (Geschwindigkeit) und p (Druck) zu berechnen. Bei Finite-Elemente-Methoden erhält man ein lineares System der Gestalt

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Frage der eindeutigen Lösbarkeit dieser Systeme ist keineswegs trivial. Sie erfordert das Erfülltsein einer Bedingung für die Finite-Elemente-Räume für Geschwindigkeit und Druck.

13.4 Fortgeschrittene Finite-Elemente-Verfahren

- hierarchische Finite-Elemente,
- hp-Finite-Elemente,
- discontinuous Galerkin-Finite-Element-Methoden,
- isoparametrische Finite-Elemente,
- anisotrope Finite-Elemente.

Literaturverzeichnis

- [Ada75] R.A. Adams. *Sobolev spaces*. Academic Press, New York, 1975.
- [AF03] R.A. Adams and J.J.F. Fournier. *Sobolev spaces*. Pure and Applied Mathematics 140. Elsevier, 2nd edition, 2003.
- [Alt99] H.W. Alt. *Lineare Funktionalanalysis. Eine anwendungsorientierte Einführung*. Springer Berlin, 3. edition, 1999.
- [BS94] S.C. Brenner and L.R. Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*, volume 15 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag New York, ..., 1994.
- [Clé75] Ph. Clément. Approximation by finite element functions using local regularization. *RAIRO Anal. Numer.*, 2:77 – 84, 1975.
- [CR73] M. Crouzeix and P.-A. Raviart. Conforming and nonconforming finite element methods for solving the stationary Stokes equations I. *R.A.I.R.O. Anal. Numér.*, 7:33–76, 1973.
- [DiB95] E. DiBenedetto. *Partial Differential Equations*. Birkhäuser Berlin, Basel, Boston, 1995.
- [Eva98] L.C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society (AMS), Providence, RI, 1998.
- [Gri85] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*. Pitman, Boston, 1985.
- [GRT93] H. Goering, H.-G. Roos, and L. Tobiska. *Finite Element Methode*. Akademie Verlag, Berlin, 1993.
- [GT01] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*. Classics in Mathematics. Springer Berlin, 2001.
- [Joh82] F. John. *Partial differential equations*. Number 1 in Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag New York, fourth edition, 1982.
- [Jos98] J. Jost. *Partielle Differentialgleichungen*. Springer, 1998.
- [RR96] M. Renardy and R.C. Rogers. *An introduction to partial differential equations*, volume 13 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer Berlin, 1996.
- [RT92] R. Rannacher and S. Turek. Simple nonconforming quadrilateral Stokes element. *Numer. Meth. Part. Diff. Equ.*, 8:97 – 111, 1992.
- [Sam84] A.A. Samarskij. *Theorie der Differenzenverfahren*, volume 40 of *Mathematik und ihre Anwendungen in Physik und Technik*. Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig K.-G., Leipzig, 1984.

- [SZ90] L.R. Scott and S. Zhang. Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions. *Math. Comp.*, 54:483 – 493, 1990.

Index

- L^2 -Projektion
 - lokale, 106
- δ -Distribution, 26
- Überdeckung, 19
- 5-Punkte-Stern, 69

- a priori Abschätzung, 122
- Ableitung
 - distributionelle, 26
 - schwache, 26
 - verallgemeinerte, 26
- adjungierter Operator, 48
- affine Transformation, 89

- baryzentrische Koordinaten, 88
- Bramble-Hilbert-Lemma, 99

- Cauchy-Schwarz-Ungleichung, 31
- Cea-Lemma, 84
- Charakteristiken
 - Prinzip der, 16
- charakteristische Funktion, 62
- Crouzeix-Raviart-Finite-Element, 92, 114

- d'Alembertsche Lösungsformel, 18
- Dirac-Distribution, 26
- Dirac-Folge, 28
- Dirichlet-Prinzip, 13
- diskretes Maximum-Prinzip, 71
- Distribution, 25
 - reguläre, 26
 - singuläre, 26
- duales Problem, 119

- elliptisch
 - gleichmäßig, 49
- Energie-Norm, 115
- Energiefunktional, 43
- Evolutionsoperator, 59

- Faltung, 29
- Fehlerabschätzer
 - globaler a posteriori, 122
 - lokale a posteriori, 123
- Finite-Element-Raum, 86

- Fourier-Gesetz, 4
- Friedrichs-Ungleichung, 36
- Fundamentallösung, 52
 - Wärmeleitungsgleichung, 60

- Galerkin-Methode, 84
- Gitter, 86
- Gitterfunktion, 67
- Gitterzellen, 86
- globale Basis, 86
- Graph, 20
- Greensche Formel
 - erste, 38
 - zweite, 39
- Greensche Funktion, 55
- Greensche Funktion zum Dirichlet-Problem, 55

- Halbgruppe, 59
- harmonische Funktion, 5
- Heaviside-Funktion, 27
- Hermite-Element, 89

- integrierbar, 20
- Interpolationsoperator
 - Clement, 105
- Interpolierende, 100
- inverse Abschätzung, 104

- Jacobi-Matrix, 21

- konsistenter Differenzenoperator, 68
- Konsistenz, 109
- Konvergenz von Distributionen, 27

- Lösung
 - schwache, 46
- Lagrange-Element, 89
- Laplace-Gleichung, 5, 10
- Laplace-Operator, 5
- Lemma
 - von Hopf, 57
- lexikographische Numerierung, 79
- Lipschitz-Gebiet, 19
- Lipschitz-Rand, 19
- lokale Basis, 85

Maximum-Prinzip
 diskretes, 71
 Maximumprinzip, 13, 15
 für Gesamtraumproblem, 64
 parabolisches, 15
 schwaches, 56
 starkes, 58, 63
 messbar, 20
 Mittelwertformel für harmonische
 Funktionen, 10

 Neumann-Problem, 49, 55
 Neumann-Randbedingung, 120
 Newton-Potential, 52
 Norm
 äquivalente, 35
 Energie-, 115

 parabolischer Rand, 15
 parametrische Finite-Elemente, 87
 partielle Differentialgleichung
 linear, 42
 quasilinear, 42
 zweiter Ordnung, 42
 partielle Integration, 9
 Poincaré-Ungleichung, 36
 Poisson-Gleichung, 5, 14

 Rückwärtsdifferenz, 67
 Rademacher
 Satz von, 20
 Randwertproblem
 gemischt, 120
 Ritz-Approximation, 82

 schnelle Fourier-Transformation, 80
 schwache Formulierung, 46
 schwache Lösung, 46
 Schwerpunkt, 88
 Simplex, 87
 Sobolev-Raum, 32
 Sobolev-Slobodeckij-Raum, 34
 Sobolev-Ungleichung, 39
 Sprung, 116
 Spur, 34
 Steifigkeitsmatrix, 83
 Strang-Lemma, 110

 Teilung der 1, 19
 Transportgleichung, 16
 Triangulierung, 86
 quasi-uniform, 102
 regulär, 86

 Unisolvanz, 85

 Verfahren
 quasi-optimal, 118
 Vergleichslemma, 73
 Vorwärtsdifferenz, 67

 Wärmeleitungsgleichung, 5, 15
 Wellengleichung, 16

 Youngsche Ungleichung, 30

 zentrale Differenz, 67
 zweite Differenz, 67