

Kapitel 12

Finite-Element-Methoden für Elliptische Gleichungen zweiter Ordnung

12.1 Allgemeine Konvergenzsätze

Wir haben bereits sogenannte nicht-konforme Finite-Elemente kennengelernt, das heißt, der Finite-Element-Raum V_h ist kein Teilraum des Raumes V in dem das stetige Problem definiert ist $V_h \not\subset V$. Das trifft auf das Crouzeix-Raviart- und das Rannacher-Turek-Element zu. Ein anderer Fall von Nichtkonformität ist gegeben, wenn das Gebiet nicht polyhedral berandet ist und approximiert werden muss. Für nichtkonforme Finite-Elemente ist die FEM kein Ritzsches Verfahren mehr, so dass der Konvergenzbeweis für dieses Verfahren aus Abschnitt 10.1 nicht verwendet werden kann. Der folgende abstrakte Konvergenzsatz gestattet auch die Analyse komplizierter Finiter-Elemente und Verfahren.

Für die Gitterweiten $\{h > 0\}$ seien S_h, V_h normierte Räume von Funktionen, die auf Gebieten $\{\Omega_h \subset \mathbb{R}^d\}$ definiert sind. Es wird vorausgesetzt, dass die Räume S_h endlichdimensional sind und dass S_h und V_h eine gemeinsame Norm $\|\cdot\|_h$ besitzen. In den später folgenden Anwendungen der abstrakten Theorie wird S_h ein Finite-Element-Raum sein und V_h wird so definiert, dass die Einschränkung und/oder Fortsetzung der Lösung des kontinuierlichen Problems auf Ω_h in V_h enthalten ist. Da die so modifizierte kontinuierliche Lösung im engeren Sinne das gegebene Problem nicht mehr löst, ist es konsequent, wenn in der abstrakten Theorie das kontinuierliche Problem nicht mehr vorkommt.

Seien Bilinearformen

$$\begin{aligned} a_h &: S_h \times S_h \rightarrow \mathbb{R}, \\ \tilde{a}_h &: (S_h + V_h) \times (S_h + V_h) \rightarrow \mathbb{R} \end{aligned}$$

gegeben. Die Form a_h sei regulär in dem Sinn, dass es eine von h unabhängige Konstante $m > 0$ gibt, sodass zu jedem $v_h \in S_h$ ein $w_h \in S_h$, $\|w_h\|_h = 1$, existiert mit

$$m \|v_h\|_h \leq a_h(v_h, w_h). \quad (12.1)$$

Diese Bedingung ist äquivalent zur gleichmäßigen (unabhängig von h) Regularität der Steifigkeitsmatrix A mit Einträgen $a_{ij} = a_h(\phi_j, \phi_i)$. Für die zweite Bilinearform wird lediglich die Beschränktheit vorausgesetzt:

$$\tilde{a}_h(u, v) \leq M \|u\|_h \|v\|_h \quad \forall u, v \in S_h + V_h. \quad (12.2)$$

Des weiteren werden für die linearen Funktionale $\{f_h(\cdot)\}$ auf S_h die diskreten Probleme: Gesucht ist $u_h \in S_h$ mit

$$a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h) \quad \forall v_h \in S_h \quad (12.3)$$

definiert. Aufgrund der Regularität der Steifigkeitsmatrix ist die Lösung dieses Problems eindeutig bestimmt.

Satz 12.1 *Seien die Voraussetzungen (12.1) und (12.2) erfüllt. Dann gilt für die Lösung u_h von (12.3) und für beliebiges $\tilde{u} \in V_h$ die Abschätzung*

$$\begin{aligned} \|\tilde{u} - u_h\|_h &\leq c \inf_{v_h \in S_h} \left\{ \|\tilde{u} - v_h\|_h + \sup_{w_h \in S_h} \frac{|\tilde{a}_h(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_h} \right\} \\ &\quad + c \sup_{w_h \in S_h} \frac{|\tilde{a}_h(\tilde{u}, w_h) - f_h(w_h)|}{\|w_h\|_h} \end{aligned}$$

mit $c = c(m, M)$.

Beweis: Nach (12.1) gibt es zu beliebigem $v_h \in S_h$ ein $w_h \in S_h$ mit $\|w_h\|_h = 1$ und

$$m \|u_h - v_h\|_h \leq a_h(u_h - v_h, w_h).$$

Mit der Definition von u_h aus (12.3) folgt daraus

$$m \|u_h - v_h\|_h \leq f_h(w_h) - a_h(v_h, w_h) + \tilde{a}_h(v_h, w_h) + \tilde{a}_h(\tilde{u} - v_h, w_h) - \tilde{a}_h(\tilde{u}, w_h).$$

Aus (12.2) und $\|w_h\|_h = 1$ folgt

$$\tilde{a}_h(\tilde{u} - v_h, w_h) \leq M \|\tilde{u} - v_h\|_h.$$

Durch entsprechende Gruppierung der Terme erhält man (beachte $\|w_h/\|w_h\|_h\|_h = 1$)

$$\begin{aligned} m \|u_h - v_h\|_h &\leq M \|\tilde{u} - v_h\|_h + \sup_{w_h \in S_h} \frac{|\tilde{a}_h(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_h} \\ &\quad + \sup_{w_h \in S_h} \frac{|\tilde{a}_h(\tilde{u}, w_h) - f_h(w_h)|}{\|w_h\|_h}. \end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung

$$\|\tilde{u} - u_h\|_h \leq \|\tilde{u} - v_h\|_h + \|u_h - v_h\|_h$$

und Einsetzen der obigen Abschätzung folgt die Behauptung. \blacksquare

Ein häufig vorkommender Spezialfall dieses Satzes liegt vor, wenn die Steifigkeitsmatrix gleichmäßig positiv definit ist, also die Bedingung

$$m \|v_h\|_h^2 \leq a_h(v_h, v_h) \quad \forall v_h \in S_h \quad (12.4)$$

erfüllt ist. Indem man (12.4) durch $\|v_h\|_h$ dividiert, sieht man sofort, dass diese Bedingung (12.1) impliziert.

Falls das kontinuierliche Problem ebenfalls mit der Bilinearform $\tilde{a}_h(\cdot, \cdot)$ definiert ist, so kann der Term

$$\sup_{w_h \in S_h} \frac{|\tilde{a}_h(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_h}$$

als Konsistenz der Bilinearformen angesehen werden und der Term

$$\sup_{w_h \in S_h} \frac{|\tilde{a}_h(\tilde{u}, w_h) - f_h(w_h)|}{\|w_h\|_h}$$

als Konsistenz der rechten Seiten.

Falls ein konformer Finite-Element-Raum vorliegt, also $S_h \subset V$ und $\|\cdot\|_h = \|\cdot\|_V$, der Raum V_h nicht von h abhängt und ein kontinuierliches Problem der Form

$$\tilde{a}(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V$$

gestellt ist, so reduziert sich der Konvergenzsatz zum sogenannten ersten Lemma von Strang.

Satz 12.2 Erstes Strang-Lemma. *Unter den eben genannten Voraussetzungen gilt*

$$\begin{aligned} \|\tilde{u} - u_h\|_V &\leq c \inf_{v_h \in S_h} \left\{ \|\tilde{u} - v_h\|_V + \sup_{w_h \in S_h} \frac{|\tilde{a}_h(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_V} \right\} \\ &\quad + c \sup_{w_h \in S_h} \frac{|f(w_h) - f_h(w_h)|}{\|w_h\|_V}. \end{aligned}$$

12.2 Lineare Finite-Element-Methoden auf nicht polyhedral berandeten Gebieten

Als erste Anwendung der abstrakten Theorie betrachten wir lineare Finite-Element-Methoden zur Lösung elliptischer Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$, eine beschränktes Gebiet mit Lipschitz-Rand, der nicht notwendig polyhedral sein muss. Sei

$$Lu = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega, \quad (12.5)$$

wobei der Operator

$$Lu = -\nabla \cdot (A\nabla u)$$

mit

$$A(\mathbf{x}) = (a_{ij}(\mathbf{x}))_{i,j=1}^d, \quad a_{ij} \in W^{1,p}(\Omega), p > d, \quad (12.6)$$

gegeben ist. Es wird vorausgesetzt, dass es zwei positive reelle Zahlen m, M gibt mit

$$m \|\xi\|_2^2 \leq \xi^T A(\mathbf{x}) \xi \leq M \|\xi\|_2^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^d, \mathbf{x} \in \bar{\Omega}. \quad (12.7)$$

Nach einer Sobolev-Ungleichung gilt $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$. Mit

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (A(\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x})) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung erhält man

$$|a(u, v)| \leq \|A\|_{L^\infty(\Omega)} \int_{\Omega} |\nabla u(\mathbf{x}) \cdot \nabla v(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}$$

für alle $u, v \in H_0^1(\Omega)$. Ebenso folgt

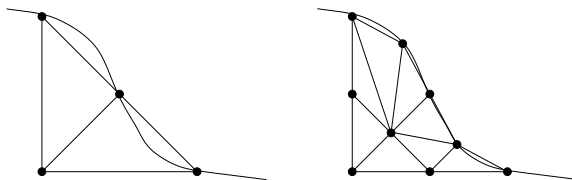
$$m \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq a(u, u) \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Damit ist die Bilinearform beschränkt und elliptisch. Aus dem Satz von Lax-Milgram folgt, dass die (schwache) Lösung $u \in H_0^1(\Omega)$ zu (12.5) mit

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

eindeutig existiert.

Sei \mathcal{T}_h eine reguläre Triangulierung aus Simplizes K , deren Ecken in $\overline{\Omega}$ liegen und definiere $\overline{\Omega}_h = \cup K$.



Der Raum der stückweise linearen und stetigen Funktionen, die auf dem Rand von Ω_h verschwinden, wird mit P_1 bezeichnet. Wir setzen voraus, dass es für die Daten des zu approximierenden Problems a_{ij}, f Fortsetzungen $\tilde{a}_{ij}, \tilde{f}$ auf ein größeres Gebiet $\tilde{\Omega} \supset \overline{\Omega}_h$ gibt mit

$$\|\tilde{a}_{ij}\|_{W^{1,p}(\tilde{\Omega})} \leq c \|a_{ij}\|_{W^{1,p}(\Omega)}, \quad \|\tilde{f}\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}. \quad (12.8)$$

Ferner wird vorausgesetzt, dass die fortgesetzten Koeffizienten \tilde{a}_{ij} der Elliptizitätsbedingung (12.7) auf $\tilde{\Omega}$ genügen.

Offenbar kann f einfach mit Null fortgesetzt werden. Bei der Fortsetzung der a_{ij} muss man die schwache Differenzierbarkeit erhalten. Dies ist möglich, jedoch kompliziert, siehe Literatur.

Die Finite-Element-Methode ist nun definiert durch: Gesucht ist $u_h \in P_1$ mit

$$a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h) \quad \forall v_h \in P_1,$$

wobei

$$a_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega_h} \left(\tilde{A}(\mathbf{x}) \nabla u_h(\mathbf{x}) \right) \cdot \nabla v_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad f_h(v_h) = \int_{\Omega_h} \tilde{f}(\mathbf{x}) v_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

In der Praxis wird man diese Methode so nicht anwenden, da man aus der Existenz des Fortsetzungsoperators für a_{ij} ja noch lange nicht weiss, wie man diesen tatsächlich berechnen kann. Eine Alternative ist die Verwendung von Quadraturformeln, deren Quadraturpunkte nur innerhalb von $\overline{\Omega}$ liegen, siehe Literatur. Oft ist es in der Praxis auch so, dass die Koeffizienten a_{ij} konstant oder zumindest stückweise konstant sind. Dann ist ihre Fortsetzung wiederum trivial.

Das Ziel besteht darin, die lineare Konvergenz des Finite-Element-Verfahrens in $\|\cdot\|_h = \|\cdot\|_{H^1(\Omega_h)}$ zu beweisen. Dabei muss berücksichtigt werden, dass im allgemeinen weder $\Omega_h \subset \Omega$ noch $\Omega \subset \Omega_h$ gilt. Wir setzen voraus, dass es eine Fortsetzung $\tilde{u} \in H^2(\tilde{\Omega})$ von u gibt mit

$$\|\tilde{u}\|_{H^2(\tilde{\Omega})} \leq c \|u\|_{H^2(\Omega)}. \quad (12.9)$$

Ferner wird vorausgesetzt, dass Ω_h das Originalgebiet Ω hinreichend gut approximiert, in dem Sinne dass

$$\max_{\mathbf{x} \in \partial\Omega_h} \text{dist}(\mathbf{x}, \partial\Omega) \leq ch^2 \quad (12.10)$$

gilt. Für $d = 2$ ist diese Bedingung erfüllt, wenn der Rand von Ω stückweise C^2 ist und die Ecken von Ω Knotenpunkte der Triangulierung sind. In diesem Fall kann nämlich das Koordinatensystem lokal gedreht werden, so dass der Abstand zwischen $\partial\Omega$ und $\partial\Omega_h$ als Fehler eines eindimensionalen Interpolationsproblems mit stetigen, stückweise linearen Finite-Elementen dargestellt wird. Nach bekannten Fehlerabschätzungen für solche Probleme, siehe Literatur, kann der Fehler durch ch^2 abgeschätzt werden. (Das sollte im Detail in [GRT93] stehen.) Bei dreidimensionalen Gebieten mit stückweise C^∞ -Rand benötigt man zusätzlich eine analoge Glattheitsbedingungen für die Kanten.

Wir beginnen den Beweis mit einem Lemma.

Lemma 12.3 Sei Bedingung (12.10) erfüllt. Für alle $v \in W^{1,1}(\Omega)$ gilt dann die Abschätzung

$$\int_{\Omega_s} |v(\mathbf{x})| \, d\mathbf{x} \leq ch^2 \int_{\Omega} (|v(\mathbf{x})| + \|\nabla v(\mathbf{x})\|_2) \, d\mathbf{x},$$

wobei Ω_s eine der Mengen $\Omega \setminus \Omega_h$ oder $\Omega_h \setminus \Omega$ bezeichnet.

Beweis: Zuerst wird eine eindimensionale Abschätzung gezeigt. Für $f \in C^1([0, 1])$ erhält man aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$f(x) = \int_y^x f'(\xi) \, d\xi + f(y) \quad \forall x, y \in [0, 1],$$

woraus

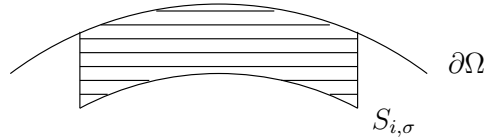
$$|f(x)| \leq \int_0^1 |f'(\xi)| \, d\xi + |f(y)|$$

folgt. Diese Beziehung wird bezüglich y in $[0, 1]$ integriert und bezüglich x in $[0, a]$ mit $a \in (0, 1]$. Man erhält

$$\int_0^a |f(x)| \, dx \leq a \int_0^1 |f'(\xi)| \, d\xi + a \int_0^1 |f(y)| \, dy = a \int_0^1 (|f(x)| + |f'(x)|) \, dx. \quad (12.11)$$

Wir betrachten den Fall $\Omega_s = \Omega \setminus \Omega_h$. Da Ω ein Lipschitz-Gebiet ist, kann man zeigen, dass $\partial\Omega$ sich mit endlich vielen offenen Mengen U_1, \dots, U_N überdecken lässt. Dann kann nach einer Drehung des Koordinatensystems $\partial\Omega \cap U_i$ als eine Lipschitz-Funktion g_i der $d-1$ Variablen $\mathbf{y}' = (y_1, \dots, y_{d-1}) \in U'_i \subset \mathbb{R}^{d-1}$ dargestellt werden. Wir werden jetzt Mengen konstruieren, deren Vereinigung die Differenz $\Omega \setminus \Omega_h$ überdeckt. Sei

$$S_{i,\sigma} = \{(\mathbf{y}', y_d) : g_i(\mathbf{y}') - \sigma < y_d < g_i(\mathbf{y}'), \mathbf{y}' \in U'_i\}.$$



$$\text{----- } U'_i$$

Dann gilt $(\Omega \setminus \Omega_h) \cap U'_i \subset S_{i,c_1 h^2}$, wobei c_1 von g_i , aber nicht von h abhängt. Ferner gibt es ein σ_0 , so dass $S_{i,\sigma_0} \subset \Omega$ für alle i .

Transformation (12.11) auf das Intervall $[0, \sigma_0]$ liefert für genügend kleines h

$$\int_0^{c_1 h^2} |f(x)| \, dx \leq ch^2 \int_0^{\sigma_0} (|f(x)| + |f'(x)|) \, dx.$$

Für $v \in C^1(\overline{\Omega})$ wird die Abschätzung auf die gedrehte Funktion $v(\mathbf{y}', x)$ angewandt und man erhält mit dem Satz von Fubini

$$\begin{aligned} \int_{S_{i,c_1 h^2}} |v(\mathbf{y})| \, d\mathbf{y} &= \int_{U'_i} \int_0^{c_1 h^2} |v(\mathbf{y}', x)| \, dx \, d\mathbf{y}' \\ &\leq ch^2 \int_{U'_i} \int_0^{\sigma_0} (|\partial_x v(\mathbf{y}', x)| + |v(\mathbf{y}', x)|) \, dx \, d\mathbf{y}' \\ &\leq ch^2 \int_{\Omega} (|\partial_{y_d} v(\mathbf{y})| + |v(\mathbf{y})|) \, d\mathbf{y}. \end{aligned}$$

Summation über i beweist das Lemma für Funktionen aus $C^1(\bar{\Omega})$. Da $C^1(\bar{\Omega})$ dicht in $W^{1,1}(\Omega)$ ist, gilt es auch für $v \in W^{1,1}(\Omega)$.

Der Fall $\Omega_s = \Omega_h \setminus \Omega$ kann analog bewiesen werden. ■

Zum Beweis der Konvergenzaussage wird der abstrakte Konvergenzsatz verwendet. Man wählt $S_h = P_1$, $V_h = H^1(\Omega_h)$, $\|\cdot\|_h = \|\cdot\|_{H^1(\Omega_h)}$ und

$$a_h(u, v) = \tilde{a}_h(u, v) = \int_{\Omega_h} \left(\tilde{A}(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x}) \right) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Mit dieser Wahl von $a_h(\cdot, \cdot)$ und $\tilde{a}_h(\cdot, \cdot)$ verschwindet der mittlere Term in der abstrakten Fehlerabschätzung und man muss nur den letzten Term abschätzen. Die Regularität und die Beschränktheit von $a_h(\cdot, \cdot)$ lassen sich leicht mit der Elliptizität und der Beschränktheit der Koeffizienten $\tilde{a}_{ij}(\mathbf{x})$ nachweisen. Im abstrakten Konvergenzsatz setzt man $v_h = I_h \tilde{u}$ und man erhält aus der Interpolationsfehlerabschätzung und (12.9)

$$\|\tilde{u} - I_h \tilde{u}\|_{H^1(\Omega_h)} \leq ch \|D^2 \tilde{u}\|_{L^2(\Omega_h)} \leq ch \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

Zur Behandlung des letzten Terms in der abstrakten Konvergenzabschätzung wird partielle Integration verwendet

$$a_h(\tilde{u}, w_h) = \int_{\Omega_h} \left(\tilde{A}(\mathbf{x}) \nabla \tilde{u}(\mathbf{x}) \right) \cdot \nabla w_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega_h} g(\mathbf{x}) w_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

mit $g(\mathbf{x}) = -\nabla \cdot (\tilde{A} \nabla \tilde{u})(\mathbf{x})$. Wegen $g = \tilde{f} = f$ in Ω ist

$$a_h(\tilde{u}, w_h) - f_h(w_h) = \int_{\Omega_h \setminus \Omega} \left(g(\mathbf{x}) - \tilde{f}(\mathbf{x}) \right) w_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Durch Fortsetzung von w_h durch Null auf $\Omega \setminus \Omega_h$ folgt aus dem obigen Lemma

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_h \setminus \Omega} |w_h(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} &\leq ch^2 \int_{\Omega} \left(\|\nabla w_h(\mathbf{x})\|_2^2 + |w_h(\mathbf{x})|^2 \right) \, d\mathbf{x} \\ &\leq ch^2 \int_{\Omega_h} \left(\|\nabla w_h(\mathbf{x})\|_2^2 + |w_h(\mathbf{x})|^2 \right) \, d\mathbf{x} = ch^2 \|w_h\|_{H^1(\Omega_h)}^2. \end{aligned}$$

Mit der Cauchy–Schwarz–Ungleichung und der Dreiecksungleichung gilt

$$\begin{aligned} |a_h(\tilde{u}, w_h) - f_h(w_h)| &\leq \left\| g - \tilde{f} \right\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)} \|w_h\|_{L^2(\Omega_h \setminus \Omega)} \\ &\leq ch \left(\|g\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \left\| \tilde{f} \right\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \right) \|w_h\|_{H^1(\Omega_h)}. \end{aligned}$$

Nun muss noch $\|g\|_{L^2(\tilde{\Omega})}$ abgeschätzt werden. Mit der Produktregel und der Dreiecksungleichung folgt

$$\left\| \nabla \cdot (\tilde{A} \nabla \tilde{u}) \right\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \left\| \sum_{i,j=1}^d \tilde{a}_{ij} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\tilde{\Omega})} + \left\| (\nabla \cdot \tilde{A}) \cdot \nabla \tilde{u} \right\|_{L^2(\tilde{\Omega})}.$$

Wegen der Sobolev–Einbettung $W^{1,p}(\tilde{\Omega}) \rightarrow L^\infty(\tilde{\Omega})$ für $p > d$ folgt $\left\| \tilde{A} \right\|_{L^\infty(\tilde{\Omega})} \leq c$ und damit für den ersten Term

$$\left\| \sum_{i,j=1}^d \tilde{a}_{ij} \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq c \|D^2 \tilde{u}\|_{L^2(\tilde{\Omega})}.$$

Zur Abschätzung des zweiten Terms nutzt man die Höldersche Ungleichung *Übungsaufgabe*

$$\left\| \left(\nabla \cdot \tilde{A} \right) \cdot \nabla \tilde{u} \right\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \leq \left\| \nabla \cdot \tilde{A} \right\|_{L^p(\tilde{\Omega})}^2 \left\| \nabla \tilde{u} \right\|_{L^{2p/(p-2)}(\tilde{\Omega})}^2 \leq c \left\| \nabla \tilde{u} \right\|_{L^{2p/(p-2)}(\tilde{\Omega})}^2.$$

Wegen $2p/(p-2) < 2d/(d-2)$ für $p > d$ und der Sobolev-Ungleichung kann man schließlich noch

$$\left\| \nabla \tilde{u} \right\|_{L^{2p/(p-2)}(\tilde{\Omega})} \leq c \left\| \tilde{u} \right\|_{H^2(\tilde{\Omega})}$$

abschätzen. Setzt man diese Abschätzungen ein, erhält man mit (12.8) und (12.9)

$$\begin{aligned} |a_h(\tilde{u}, w_h) - f_h(w_h)| &\leq ch \left(\left\| \tilde{u} \right\|_{H^2(\tilde{\Omega})} + \left\| \tilde{f} \right\|_{L^2(\tilde{\Omega})} \right) \left\| w_h \right\|_{H^1(\Omega_h)} \\ &\leq ch \left(\left\| u \right\|_{H^2(\Omega)} + \left\| f \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \left\| w_h \right\|_{H^1(\Omega_h)} \\ &\leq ch \left\| u \right\|_{H^2(\Omega)} \left\| w_h \right\|_{H^1(\Omega_h)}. \end{aligned}$$

Im letzten Schritt nutze man die Darstellung von f aus (12.5), mit welcher man eine analoge Abschätzung wie für g durchführen kann. Damit ist die lineare Konvergenz bewiesen.

Satz 12.4 *Seien die Voraussetzungen (12.6), (12.7), (12.8), (12.9) und (12.10) erfüllt. Dann gilt die Fehlerabschätzung*

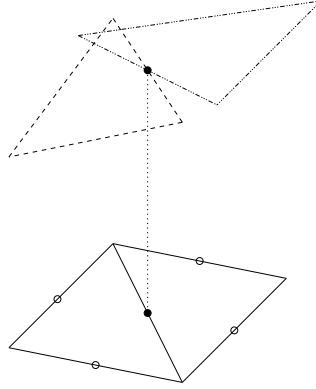
$$\left\| \tilde{u} - u_h \right\|_{H^1(\Omega_h)} \leq ch \left\| u \right\|_{H^2(\Omega)},$$

wobei c nicht von u , f und h abhängt.

12.3 Finite-Element-Methode mit dem nichtkonformen Crouzeix-Raviart-Element

Das nichtkonforme Crouzeix-Raviart-Finite-Element wurde im Abschnitt 10.4 eingeführt. Wegen der einfacheren Darstellung wollen wir uns hier auf den zweidimensionalen Fall beschränken. Um nicht zusätzlich einen Gebietsapproximationsfehler untersuchen zu müssen, setzen wir voraus, dass Ω ein konvexes, polygonal berandetes Gebiet ist.

Sei \mathcal{T}_h eine reguläre Triangulierung von Ω mit Dreiecken. Mit P_1^{nc} (nc – non conforming) bezeichnen wir den Finite-Element-Raum der stückweise linearen Finite-Elemente, die in den Kantenmitten stetig sind (Crouzeix-Raviart). Dieser Raum ist erstens nichtkonform bei der Diskretisierung von elliptischen Problemen zweiter Ordnung, da das stetige Problem im $H_0^1(\Omega)$ formuliert ist und die Funktionen in diesem Raum stetig in Ω sind. Die Funktionen in P_1^{nc} sind nicht stetig und nicht schwach differenzierbar. Zweitens ist der Raum nichtkonform bezüglich der Randbedingung, die nicht exakt erfüllt wird. Die Funktionen aus P_1^{nc} verschwinden in allen Kantenmittelpunkten auf dem Rand. In den anderen Randpunkten nehmen sie jedoch im allgemeinen nicht den Wert Null an.



Die Bilinearform

$$a(u, v) = \int_{\Omega} (A(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$$

wird auf $H_0^1(\Omega) + P_1^{\text{nc}}$ fortgesetzt durch

$$a_h(u, v) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (A(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) \cdot \nabla v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \quad \forall u, v \in H_0^1(\Omega) + P_1^{\text{nc}}.$$

Damit ist das nichtkonforme Finite-Element-Verfahren definiert durch: Finde $u_h \in P_1^{\text{nc}}$ mit

$$a_h(u_h, v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in P_1^{\text{nc}}.$$

Für dieses Verfahren wollen wir die lineare Konvergenz in h bezüglich der sogenannten Energie-Norm $\|\cdot\|_h = (a_h(\cdot, \cdot))^{1/2}$ zeigen. Wir setzen voraus, dass für die Lösung des stetigen Problems (12.5) gilt $u \in H^2(\Omega)$ und dass die Koeffizienten a_{ij} differenzierbar sind mit beschränkten Ableitungen.

Als erstes wollen wir eine Gleichung für den Fehler herleiten. Dazu wird das stetige Problem (12.5) mit einer Testfunktion $v_h \in P_1^{\text{nc}}$ multipliziert, das Produkt wird über Ω integriert und dann partielle Integration über die einzelnen Dreiecke angewandt:

$$\begin{aligned} (f, v_h) &= - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla \cdot (A(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) v_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K (A(\mathbf{x}) \nabla u(\mathbf{x})) \cdot \nabla v_h(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\quad - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (A(s) \nabla u(s)) \cdot \mathbf{n}_K(s) v_h(s) \, ds \\ &= a_h(u, v_h) - \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (A(s) \nabla u(s)) \cdot \mathbf{n}_K(s) v_h(s) \, ds, \end{aligned}$$

wobei \mathbf{n}_K die nach außen gerichtete Einheitsnormale an die Kanten der Dreiecke ist. Nun erhält man durch Subtraktion der Finite-Element-Gleichung

$$a_h(u - u_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} (A(s) \nabla u(s)) \cdot \mathbf{n}_K(s) v_h(s) \, ds \quad \forall v_h \in P_1^{\text{nc}}.$$

Die rechte Seite dieser Fehlergleichung zeigt, dass man bei nichtkonformen Finite-Elementen im Grunde genommen eine gestörte Gleichung diskretisiert. Das nächste Lemma gibt eine Abschätzung für diese Störung.

Lemma 12.5 Seien $u \in H^2(\Omega)$ und $a_{ij} \in W^{1,\infty}(\Omega)$. Dann gilt

$$\left| \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_{\partial K} A(s) \nabla u(s) \cdot \mathbf{n}_K(s) v_h(s) ds \right| \leq ch \|u\|_{H^2(\Omega)} \|v_h\|_h.$$

Beweis: Jede im Inneren von Ω gelegene Kante der Triangulierung kommt in den Randintegralen über ∂K genau zweimal vor, wobei der zugehörige Normaleneinheitsvektor jeweils entgegengesetztes Vorzeichen besitzt. Man kann daher für jede Kante eine Einheitsnormale fixieren und die Randintegrale in der Form

$$\sum_E \int_E [(A(s) \nabla u(s)) \cdot \mathbf{n}_E(s) v_h(s)]_E ds = \sum_E \int_E (A(s) \nabla u(s)) \cdot \mathbf{n}_E(s) [v_h]_E(s) ds$$

schreiben, wobei die Summation über alle Kanten E erfolgt, und $[v_h]_E$ den Sprung von v_h bezeichnet

$$[v_h]_E(s) = \begin{cases} v_h|_{K_1}(s) - v_h|_{K_2}(s) & s \in E \subset \Omega, \\ v_h(s) & s \in E \subset \partial\Omega, \end{cases}$$

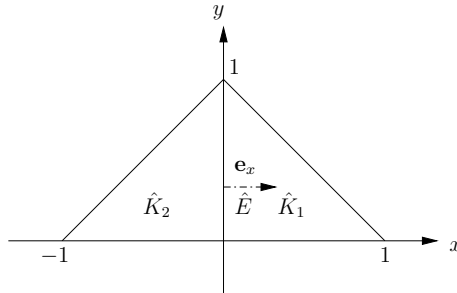
wobei \mathbf{n}_E von K_1 nach K_2 gerichtet, beziehungsweise die Außennormale an $\partial\Omega$ ist. Bei dieser Schreibweise wurde ausgenutzt, dass sowohl ∇u , $A(s)$ als auch $\mathbf{n}_E(s)$ fast überall stetig sind und damit als Faktor aus dem Sprung herausgezogen werden können. Auf Grund der Stetigkeitsbedingungen an die Funktionen aus P_1^{nc} beziehungsweise der Nullrandbedingungen gilt $[v_h]_E(P) = 0$ für alle Seitenmitten P . Damit folgt (Bild in der Vorlesung)

$$\int_E [v_h]_E(s) ds = 0 \quad \forall E.$$

Sei E eine beliebige im Inneren von Ω gelegene Kante mit den anliegenden Dreiecken K_1 und K_2 . Als nächstes wollen wir die Abschätzung

$$\begin{aligned} & \left| \int_E (A(s) \nabla u(s)) \cdot \mathbf{n}_E(s) [v_h]_E(s) ds \right| \\ & \leq ch \|u\|_{H^2(K_1)} \left(\|\nabla v_h\|_{L^2(K_1)} + \|\nabla v_h\|_{L^2(K_2)} \right) \end{aligned} \quad (12.12)$$

beweisen. Dazu verwendet man eine Referenzkonfiguration $(\hat{K}_1, \hat{K}_2, \hat{E})$, wobei \hat{K}_1 das Einheitsdreieck und \hat{K}_2 das an der y -Achse gespiegelte Einheitsdreieck ist, \hat{E} ist dann die gemeinsame Kante dieser Dreiecke (Intervall $(0, 1)$ auf der y -Achse). Die Normalen an \hat{E} wird mit dem Einheitsvektor \mathbf{e}_x festgelegt. Diese Referenzkonfiguration lässt sich durch eine stetige, auf jedem \hat{K}_i lineare Abbildung auf das Tripel (K_1, K_2, E) abbilden. Für diese Abbildung gelten die im Abschnitt 11.1.2 bewiesenen Transformationsregeln.



Mit dem Verschwinden des Integrals von $[v_h]_E$ über die Kanten und dem Spursatz erhält man für jede beliebige Konstante $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \int_{\hat{E}} \left(\hat{A}(\hat{s}) \nabla \hat{u}(\hat{s}) \right) \cdot \mathbf{e}_x [\hat{v}_{h,1}]_E \, d\hat{s} &= \int_{\hat{E}} \left(\left(\hat{A}(\hat{s}) \nabla \hat{u}(\hat{s}) \right) \cdot \mathbf{e}_x - \alpha \right) [\hat{v}_{h,1}]_E \, d\hat{s} \\ &\leq c \left\| \left(\hat{A} \nabla \hat{u} \right) \cdot \mathbf{e}_x - \alpha \right\|_{H^1(\hat{K}_1)} \left\| [\hat{v}_{h,1}]_E \right\|_{L^2(\hat{E})}. \end{aligned}$$

Insbesondere kann man α so wählen, dass

$$\int_{\hat{E}} \left(\hat{A}(\hat{s}) \nabla \hat{u}(\hat{s}) \right) \cdot \mathbf{e}_x - \alpha \, d\hat{s} = 0.$$

Den L^2 -Anteil des ersten Faktors schätzen wir mit der im Lemma 11.2 bewiesenen Ungleichung (für $k=0, l=1$) ab

$$\begin{aligned} \left\| \left(\hat{A} \nabla \hat{u} \right) \cdot \mathbf{e}_x - \alpha \right\|_{H^1(\hat{K}_1)} &\leq c \left\| \nabla \left(\left(\hat{A} \nabla \hat{u} \right) \cdot \mathbf{e}_x - \alpha \right) \right\|_{L^2(\hat{K}_1)} \\ &= c \left\| \nabla \left(\left(\hat{A} \nabla \hat{u} \right) \cdot \mathbf{e}_x \right) \right\|_{L^2(\hat{K}_1)}. \end{aligned}$$

Für den zweiten Faktor verwendet man den Spursatz

$$\begin{aligned} \left\| [\hat{v}_{h,1}]_E \right\|_{L^2(\hat{E})} &\leq c \left(\|\hat{v}_h\|_{H^1(\hat{K}_1)} + \|\hat{v}_h\|_{H^1(\hat{K}_2)} \right) \\ &\leq c \left(\|\nabla \hat{v}_h\|_{L^2(\hat{K}_1)} + \|\nabla \hat{v}_h\|_{L^2(\hat{K}_2)} \right). \end{aligned}$$

In der letzten Zeile stehen zunächst nur Halbnormen. Um die Gültigkeit der letzten Abschätzung zu zeigen, muss bewiesen werden, dass das sogar Normen sind. Dann folgt diese Abschätzung aus der Normäquivalenz in endlichdimensionalen Räumen. Sei die rechte Seite gleich Null, so folgt $\hat{v}_h = c_1$ in \hat{K}_1 und $\hat{v}_h = c_2$ in \hat{K}_2 . Nun ist aber \hat{v}_h im Mittelpunkt von \hat{E} stetig, woraus $c_1 = c_2$ folgt und daraus $[\hat{v}_h]_E = 0$, also ist auch die linke Seite gleich Null. Daher definiert die letzte Zeile eine Norm auf dem Quotientenraum bezüglich $[\hat{v}_h]_E = 0$ und die Ungleichung für $\left\| [\hat{v}_{h,1}]_E \right\|_{L^2(\hat{E})}$ gilt in der angegebenen Form.

Insgesamt haben wir auf der Referenzkonfiguration

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\hat{E}} \left(\hat{A}(\hat{s}) \nabla u(\hat{s}) \right) \cdot \mathbf{e}_x [\hat{v}_{h,1}]_E \, d\hat{s} \right| \\ &\leq c \left\| \nabla \left(\left(\hat{A} \nabla u \right) \cdot \mathbf{e}_x \right) \right\|_{L^2(\hat{K}_1)} \left(\|\nabla \hat{v}_h\|_{L^2(\hat{K}_1)} + \|\nabla \hat{v}_h\|_{L^2(\hat{K}_2)} \right) \end{aligned}$$

zeigt. Diese Abschätzung wird auf das Tripel (K_1, K_2, E) transformiert. Dabei erhält man für das Kantenintegral den Faktor c (ch für ∇ und ch^{-1} für $d\hat{s}$). Für das Produkt der Normen auf der rechten Seite bekommt man den Faktor ch (ch für den ersten Faktor und c für den zweiten Faktor). Dann nutzt man noch, dass sowohl A als auch alle partiellen Ableitungen erster Ordnung von $A(s)$ beschränkt sind. Damit ist (12.12) bewiesen.

Die Behauptung des Lemmas erhält man, indem man über alle Kanten summiert und auf der rechten Seite noch die Cauchy–Schwarz–Ungleichung anwendet. ■

Mit Hilfe des Lemmas folgt aus der Fehlergleichung

$$|a_h(u - u_h, v_h)| \leq ch \|u\|_{H^2(\Omega)} \|v_h\|_h.$$

Damit ergibt sich folgende Fehlerabschätzung:

Satz 12.6 *Seien die Voraussetzungen analog zum vorangegangenen Lemma. Dann gilt*

$$\|u - u_h\|_h^2 \leq ch \|u\|_{H^2(\Omega)} \|u - u_h\|_h + ch^2 \|u\|_{H^2(\Omega)}^2.$$

Beweis: Sei $I_h : H_0^1(\Omega) \rightarrow P_1^{\text{nc}}$ der Interpolationsoperator. Dann gilt mit Hilfe der eben bewiesenen Abschätzung sowie der Abschätzung für den Interpolationsfehler

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_h^2 &= a_h(u - u_h, u - u_h) = a_h(u - u_h, u - I_h u) + a_h(u - u_h, I_h u - u_h) \\ &\leq |a_h(u - u_h, u - I_h u)| + ch \|u\|_{H^2(\Omega)} \|I_h u - u_h\|_h \\ &\leq \|u - u_h\|_h \|u - I_h u\|_h + ch \|u\|_{H^2(\Omega)} (\|I_h u - u\|_h + \|u - u_h\|_h) \\ &\leq ch \|u - u_h\|_h \|u\|_{H^2(\Omega)} + ch \|u\|_{H^2(\Omega)} \left(h \|u\|_{H^2(\Omega)} + \|u - u_h\|_h \right). \end{aligned}$$

■

Für h klein genug, ist der zweite Term in der Fehlerabschätzung von höherer Ordnung und kann in die Konstante des ersten Terms gesteckt werden. Man erhält also asymptotisch die Fehlerabschätzung

$$\|u - u_h\|_h \leq ch \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

12.4 $L^2(\Omega)$ -Fehlerabschätzungen

Man nennt ein Verfahren quasi-optimal in einer Norm, wenn die Ordnung des Verfahrensfehlers mit der bestmöglichen Approximationsordnung übereinstimmt. Schon in einer Raumdimension kann man höchstens lineare Konvergenz in $H^1(\Omega)$ für die Bestapproximierende im Raum der stetigen, stückweise linearen Polynome erzielen, wie schon das Beispiel $v(x) = x^2$ zeigt. Damit sind alle bisher betrachteten Verfahren quasi-optimal in der Energienorm. Da der Interpolationsfehler in $L^2(\Omega)$ eine Ordnung besser ist als in $H^1(\Omega)$, stellt sich die Frage, ob man für Finite-Element-Methoden in $L^2(\Omega)$ ein besseres Konvergenzresultat bekommen kann.

Vom Standpunkt der klassischen Analysis scheint eine solche höhere Fehlerordnung unwahrscheinlich zu sein, dass das Finite-Element-Verfahren bei nicht gleichförmiger Triangulierung nur von erster Ordnung konsistent ist und es bei den Finite-Differenzen-Verfahren kein Beispiel gibt, bei dem die Konvergenzordnung die Konsistenzordnung übertrifft. In diesem Abschnitt wird gezeigt, dass man bei Finite-Element-Verfahren trotzdem eine bessere Konvergenzordnung in $L^2(\Omega)$ als in $H^1(\Omega)$ bekommen kann. Allerdings ist die Quasi-Optimalität in $L^2(\Omega)$ nicht so sicher zu erreichen, wie eine Konvergenzordnung, die durch eine die Konsistenzordnung gestützt wird.

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d \in \{2, 3\}$, ein konvexes Polyedergebiet. Wir betrachten das Problem

$$-\Delta u = f \quad \text{in } \Omega, \quad u = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega. \quad (12.13)$$

Zur Gewinnung von $L^2(\Omega)$ -Fehlerabschätzungen spielt die Regularität des Problems eine entscheidende Rolle. Wir hatten auch schon früher z.B. $u \in H^2(\Omega)$ vorausgesetzt, ohne darauf einzugehen, wann gewisse Regularitätsforderungen erfüllt sind.

Definition 12.7 Sei L ein Differentialoperator zweiter Ordnung. Dieser heißt m -regulär, $m \geq 2$, wenn für alle $f \in H^{m-2}(\Omega)$ die Lösungen von $Lu = f$ in Ω , $u = 0$ auf $\partial\Omega$, im Raum $H^m(\Omega)$ liegen und der Abschätzung

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} \leq c \|f\|_{H^{m-2}(\Omega)} + c \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad (12.14)$$

genügen.

Die Definition ist so formuliert, dass sie auch bei nichteindeutiger Lösung angewandt werden kann. Beim Laplace-Operator kann der Summand $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ durch $\|f\|_{L^2(\Omega)}$ abgeschätzt werden, so dass aus (12.14) folgt *Übungsaufgabe*

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

In der Literatur sind viele Regularitätsresultate bekannt, die, grob gesprochen, darauf hinauslaufen, dass man Regularität hat, wenn die Daten des Problems (Koeffizienten des Operators, Rand des Gebiets) genügend glatt sind. Beispielsweise ist ein elliptischer Operator in Divergenzform ($\Delta = \nabla \cdot \nabla$) 2-regulär, wenn die Koeffizienten im Raum $W^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 1$, liegen und $\partial\Omega$ zweimal stetig differenzierbar ist. Ein anderes wichtiges Resultat ist die 2-Regulärheit des Laplace-Operators auf einem konvexen Gebiet. Weiterreichende Regularitätsresultate findet man insbesondere im Buch von Grisvard [Gri85].

Die Variationsgleichung zu (12.13) lautet: Finde $u \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Zur Diskretisierung verwenden wir den Raum P_1 der stetigen, stückweise linearen Finite-Elemente mit Nullrandbedingung. Sei $u_h \in P_1$ die Lösung des Problems

$$(\nabla u_h, \nabla v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in P_1. \quad (12.15)$$

Satz 12.8 Für die Lösungen der Probleme (12.13) und (12.15) gelten die Fehlerabschätzungen

$$\begin{aligned} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} &\leq ch \|f\|_{L^2(\Omega)}, \\ \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} &\leq ch^2 \|f\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Beweis: Aus der Regularitätstheorie ist bekannt, dass der Laplace-Operator auf konvexem Gebiet 2-regulär ist. Aus der Fehlerabschätzung in der $H^1(\Omega)$ -Norm und der 2-Regulärheit erhält man

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \leq ch \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq ch \|f\|_{L^2(\Omega)}.$$

Zum Nachweis der $L^2(\Omega)$ -Fehlerabschätzung sei $w \in H_0^1(\Omega)$ die eindeutig bestimmte Lösung des Hilfsproblems (dualen Problems)

$$(\nabla v, \nabla w) = (u - u_h, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega).$$

Für einen symmetrischen Differentialoperator hat das duale Problem die gleiche Gestalt wie das Originalproblem. Demzufolge ist das duale Problem auch 2-regulär und es gilt die Abschätzung

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}.$$

Zur Abschätzung verwendet man die Galerkin-Orthogonalität des Fehlers

$$(\nabla(u - u_h), \nabla v_h) = (\nabla u, \nabla v_h) - (\nabla u_h, \nabla v_h) = (f, v_h) - (f, v_h) = 0$$

für alle $v_h \in P_1$. Nun nimmt man den Fehler $u - u_h$ als Testfunktion v im dualen Problem. Sei $I_h w$ die Interpolierte von w in P_1 . Mit der Galerkin-Orthogonalität, der Interpolationsabschätzung und der Regularität von w erhält man

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}^2 &= (\nabla(u - u_h), \nabla w) = (\nabla(u - u_h), \nabla(w - I_h w)) \\ &\leq \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(w - I_h w)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq ch \|w\|_{H^2(\Omega)} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq ch \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Jetzt dividiert man durch $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ und nutzt die bekannte Fehlerabschätzung für $\|\nabla u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$ um den Beweis der Konvergenzaussage zu beenden. ■

12.5 Gemischte Randwertprobleme

In diesem Abschnitt werden Finite-Element-Methoden für das gemischte Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{in } \Omega, \\ u &= g_D && \text{auf } \Gamma_D, \\ \nabla u \cdot \mathbf{n} &= \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = g_N && \text{auf } \Gamma_N \end{aligned} \quad (12.16)$$

betrachtet. Dabei sind $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, \mathbf{n} die Einheitsaußennormale an Γ und wir nehmen an, dass $|\Gamma_D| > 0$, $|\Gamma_N| > 0$. Die Randbedingung auf Γ_N wird Neumann-Randbedingung genannt.

Sei Γ genügend glatt. Wir definieren die Räume

$$\begin{aligned} H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega) &= \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = 0\}, \\ H_{g_D,\Gamma_D}^1(\Omega) &= \{v \in H^1(\Omega) : v|_{\Gamma_D} = g_D\}. \end{aligned}$$

Zunächst betrachten wir den Fall $g_D = g_N = 0$. Im Falle $g_N = 0$ spricht man auch von natürlichen Randbedingungen. Das zu (12.16) gehörige Variationsproblem lautet: Finde $u \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$ mit

$$\min_{v \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)} F(v) = \min_{v \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)} \int_{\Omega} \left(\frac{1}{2} \|\nabla v(\mathbf{x})\|_2^2 - f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x}. \quad (12.17)$$

Im Falle $g_D = 0$ und $|\Gamma_D| > 0$ lässt sich eine Poincaré-Ungleichung der Gestalt

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$$

beweisen, siehe Lemma 4.14.

Nach dem Rieszschen Darstellungssatz hat (12.17) eine eindeutige Lösung $u \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$, die durch die Variationsgleichung

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v) \quad \forall v \in H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega) \quad (12.18)$$

gegeben ist. Das Erfülltsein der natürlichen Randbedingung ist in dieser Gleichung nicht offensichtlich. Um diese Randbedingung zu finden, nehmen wir an, dass $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Dann kann man in (12.18) für $v \in C_0^\infty(\Omega) \subset H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$ partielle Integration anwenden und erhält

$$(-\Delta u, v) = (f, v) \quad \forall v \in C_0^\infty(\Omega).$$

Damit gilt $-\Delta u = f$ in Ω . Nun setzt man $v \in C_{0,\Gamma_D}^\infty(\Omega) \subset H_{0,\Gamma_D}^1(\Omega)$ in (12.18) ein. Mit partieller Integration erhält man diesmal

$$(-\Delta u, v) + \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{s})v(\mathbf{s}) d\mathbf{s} = (f, v) \quad \forall v \in C_{0,\Gamma_D}^\infty(\Omega).$$

Wegen $-\Delta u = f$ folgt hieraus

$$\int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{s})v(\mathbf{s}) d\mathbf{s} = 0 \quad \forall v \in C_{0,\Gamma_D}^\infty(\Omega)$$

und, sofern Γ_N glatt ist,

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = 0 \quad \text{auf } \Gamma_N.$$

Die natürliche Randbedingung wird also durch das Verschwinden des Randintegrals über Γ_N in der Variationsgleichung charakterisiert.

Seien g_D und g_N jetzt beliebig gegeben. Dann lautet das kontinuierliche Problem: Finde $u \in H_{g_D, \Gamma_D}^1(\Omega)$ mit

$$(\nabla u, \nabla v) = (f, v) + \int_{\Gamma_N} g_N(\mathbf{s})v(\mathbf{s}) \, ds \quad \forall v \in H_{0, \Gamma_D}^1(\Omega).$$

Bei dieser Variationsgleichung sind Ansatzraum und Testraum unterschiedlich.

Für die Fehlerabschätzung nehmen wir der Einfachheit halber an, dass Ω ein polygonal berandetes Gebiet ist und die Randstücke Γ_D und Γ_N ebenfalls von polygonaler Form sind (keine einzelnen Punkte etc.). Dann kann man Ω so triangulieren, dass die Ränder von Γ_D und Γ_N sich aus Seitenflächen von Gitterzellen zusammensetzen. Seien P_1 der Raum der stetigen, stückweise linearen Finite-Elemente auf dieser Triangulierung mit der Eigenschaft

$$v_h(V_i) = g_D(V_i) \quad \text{für alle Eckpunkte } V_i \in \Gamma_D$$

und $P_{1,0}$ der Raum der stetigen, stückweise linearen Finite-Elemente auf dieser Triangulierung mit der Eigenschaft

$$v_h(V_i) = 0 \quad \text{für alle Eckpunkte } V_i \in \Gamma_D.$$

Das Finite-Element-Verfahren ist dann definiert durch: Finde $u_h \in P_1$, so dass

$$(\nabla u_h, \nabla v_h) = (f, v_h) + \int_{\Gamma_N} g_N(\mathbf{s})v_h(\mathbf{s}) \, ds \quad \forall v_h \in P_{1,0}.$$

Ist $g_N \neq 0$, so besitzt die Finite-Element-Gleichung einen zusätzlichen Beitrag auf der rechten Seite des Gleichungssystems, der assembliert werden muss. Davon sind natürlich nur die Testfunktionen betroffen, die auf Γ_N nicht verschwinden.

Die Konvergenzabschätzung beginnt man wie üblich mit der Fehlergleichung, die man durch Subtraktion der Finite-Element-Gleichung von der kontinuierlichen Gleichung erhält

$$(\nabla(u - u_h), \nabla v_h) = 0 \quad \forall v_h \in P_{1,0}.$$

Da $I_h(u - u_h) \in P_{1,0}$, folgt durch Verwendung dieser Funktion in der Fehlergleichung, $I_h u_h = u_h$ und der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\begin{aligned} \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)}^2 &= (\nabla(u - u_h), \nabla(u - u_h) - \nabla(I_h(u - u_h))) \\ &= (\nabla(u - u_h), \nabla(u - I_h u_h)) \\ &\leq \|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u - I_h u_h)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Auf Grund der wechselnden Randbedingung, kann man im allgemeinen nicht erwarten, dass die Lösung des kontinuierlichen Problems im $H^2(\Omega)$ liegt. Daher wird die Interpolation nur eine reduzierte Konvergenzordnung aufweisen. Im Falle $d = 2$ und falls der Wechsel der Randbedingung auf einer Geraden erfolgt, sind die Fehlerabschätzungen

$$\|\nabla(u - u_h)\|_{L^2(\Omega)} = c(u)h^{1/2}, \quad \|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} = c(u)h$$

optimal. Man hat also nur eine halb so große Konvergenzordnung wie bei reinen Dirichlet-Problemen.