

Kapitel 10

Finite–Elemente

10.1 Das Ritzsche Verfahren

Sei V ein Hilbert–Raum mit dem Skalarprodukt $a(\cdot, \cdot)$. Wir betrachten das Problem

$$\min_{v \in V} F(v) = \min_{v \in V} \left(\frac{1}{2} a(v, v) - f(v) \right),$$

wobei $f(\cdot) : V \rightarrow \mathbb{R}$ ein beschränktes lineares Funktional ist. Wie bereits bewiesen ist, besitzt das Variationsproblem eine eindeutig bestimmte Lösung $u \in V$, die außerdem die Gleichung

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V \tag{10.1}$$

löst, Satz 5.4 (Rieszscher Darstellungssatz).

Um die Lösung der obigen Probleme mit einem numerischen Verfahren zu approximieren, setzen wir voraus, dass V ein separabler Hilbert–Raum ist, d.h. V besitzt eine abzählbare Basis. Dann gibt es endlich–dimensionale Teilräume $V_1, V_2, \dots \subset V$ mit $\dim V_k = k$, die folgende Eigenschaft besitzen: zu jedem $u \in V$ und $\varepsilon > 0$ gibt es ein $K \in \mathbb{N}$ und ein $u_k \in V_k$ mit

$$\|u - u_k\|_V \leq \varepsilon \quad \forall k \geq K.$$

Es wird dabei nicht verlangt, dass es eine Inklusion der Form $V_k \subset V_{k+1}$ gibt.

Die Ritz–Approximation von (10.1) ist wie folgt definiert. Gesucht ist $u_k \in V_k$ mit

$$a(u_k, v_k) = f(v_k) \quad \forall v_k \in V_k. \tag{10.2}$$

Da endlich–dimensionale Teilräume von Hilbert–Räumen wiederum Hilbert–Räume sind, besitzt nach dem Rieszschen Darstellungssatz auch die Gleichung der Ritz–Approximation eine eindeutige Lösung, die ebenso ein Minimierungsproblem im Raum V_k löst. Aus der Differenz der Gleichungen (10.1) und (10.2) erhält man die Orthogonalitätsrelation

$$a(u - u_k, v_k) = 0 \quad \forall v_k \in V_k. \tag{10.3}$$

Das besagt, dass der Fehler $u - u_k$ senkrecht zum Raum V_k ist: $u - u_k \perp V_k$. Demnach ist u_k die orthogonale Projektion von u in den Raum V_k bezüglich des Skalarproduktes von V . Das heißt, u_k ist die Bestapproximierende von u in V_k

$$\|u - u_k\|_V = \inf_{v_k \in V_k} \|u - v_k\|_V.$$

Zum Beweis nutzt man die Orthogonalität (10.3) und die Cauchy–Schwarz–Ungleichung. Sei $w_k \in V_k$ beliebig, dann ist

$$\begin{aligned}\|u - u_k\|_V^2 &= a(u - u_k, u - u_k) = a(u - u_k, u - \underbrace{(u_k - w_k)}_{v_k}) = a(u - u_k, u - v_k) \\ &\leq \|u - u_k\|_V \|u - v_k\|_V.\end{aligned}$$

Da $w_k \in V_k$ beliebig ist, ist auch $v_k \in V_k$ beliebig.

Mit der Bestapproximationseigenschaft erhält man

$$\|u - u_k\|_V = \inf_{v_k \in V_k} \|u - v_k\|_V \leq \varepsilon,$$

woraus schließlich die Konvergenz der Ritz–Approximation $u_k \rightarrow u$ für $k \rightarrow \infty$ folgt.

Für die Berechnung der u_k kann man eine beliebige Basis $\{\phi_i\}_{i=1}^k$ von V_k verwenden. Zunächst gilt, dass die Gleichung der Ritz–Approximation (10.2) genau dann für alle $v_k \in V_k$ erfüllt ist, wenn sie für jede Basisfunktion ϕ_i erfüllt ist. Das folgt aus der Linearität der Gleichung bezüglich der Testfunktion und daraus, dass man jede Funktion $v_k \in V_k$ als Linearkombination der Basisfunktionen darstellen kann. Man setzt auch die Lösung als Linearkombination der Basisfunktionen an

$$u_k = \sum_{j=1}^k u^j \phi_j$$

mit unbekanntem Koeffizienten u^j und erhält, indem man als Testfunktionen jetzt die Basisfunktionen nutzt,

$$\sum_{j=1}^k a(u^j \phi_j, \phi_i) = f(\phi_i), \quad i = 1, \dots, k.$$

Das ist äquivalent zu einem Gleichungssystem $Au = b$, wobei

$$A = (a_{ij}) = a(\phi_j, \phi_i)$$

Steifigkeitsmatrix genannt wird. Man beachte die unterschiedliche Reihenfolge der Indizes bei den Matrixeinträgen und beim Skalarprodukt. Die rechte Seite ist ein Vektor der Länge k mit den Einträgen $b_i = f(\phi_i)$.

Mit der eindeutigen Zuordnung zwischen dem Koordinatenvektor $(u^1, \dots, u^k)^T$ und dem Element $v_k = \sum_{i=1}^k u^i \phi_i$ lässt sich zeigen, dass die Matrix A symmetrisch und positiv definit ist:

$$\begin{aligned}A = A^T &\Leftrightarrow a(v, w) = a(w, v) \quad \forall v, w \in V_k, \\ x^T Ax > 0 \text{ für } x \neq 0 &\Leftrightarrow a(v, v) > 0 \quad \forall v \in V_k, v \neq 0.\end{aligned}$$

Übungsaufgabe

Im nichtvariationellen Fall, also wenn $b(\cdot, \cdot)$ unsymmetrisch, aber äquivalent zum Skalarprodukt $a(\cdot, \cdot)$ ist, kann man: Finde $u \in V$ mit

$$b(u, v) = f(v) \quad \forall v \in V \tag{10.4}$$

auch mit dem Ritzschen Verfahren approximieren. Das diskrete Problem lautet: Finde $u_k \in V_k$, so dass

$$b(u_k, v_k) = f(v_k) \quad \forall v_k \in V_k. \tag{10.5}$$

Die diskrete Lösung existiert eindeutig nach dem Satz 5.7 (Lax–Milgram). Sie ist jedoch keine orthogonale Projektion in V_k mehr. Trotzdem kann man die gleiche Fehlerabschätzung wie im variationellen Fall beweisen. Aus der Differenz der stetigen Gleichung (10.4) und der diskreten Gleichung (10.5)

$$b(u - u_k, v_k) = 0 \quad \forall v_k \in V_k$$

und

$$m \|v\|_V^2 \leq b(v, v) \quad \text{und} \quad |b(u, v)| \leq M \|u\|_V \|v\|_V$$

folgt

$$\begin{aligned} \|u - u_k\|_V^2 &\leq \frac{1}{m} b(u - u_k, u - u_k) = \frac{1}{m} b(u - u_k, u - v_k) \\ &\leq \frac{M}{m} \|u - u_k\|_V \|u - v_k\|_V. \end{aligned}$$

Damit hat man das sogenannte Lemma von Cea bewiesen

$$\|u - u_k\|_V \leq \frac{M}{m} \inf_{v_k \in V_k} \|u - v_k\|_V. \quad (10.6)$$

Im unsymmetrischen Fall wird dieses Verfahren Galerkin–Methode genannt. Das lineare Gleichungssystem wird genauso wie im symmetrischen Fall hergeleitet. Die Systemmatrix ist immer noch positiv definit, aber nicht mehr symmetrisch.

Der wichtigste Punkt beim Ritzschen Verfahren und bei der Galerkin–Methode ist die Wahl der Räume V_k , oder genauer, die Wahl von geeigneten Basen $\{\phi_i\}_{i=1}^k$, die einen Raum V_k aufspannen. Vom numerischen Standpunkt aus sollten die Elemente a_{ij} der Steifigkeitsmatrix schnell zu berechnen sein und die Matrix A sollte nur schwach besetzt sein. Das wird der Schwerpunkt der restlichen Vorlesung sein.

10.2 Finite–Element–Räume

Im folgenden sei K ein abgeschlossener, beschränkter Polyeder im \mathbb{R}^d , $d \in \{2, 3\}$. Der Rand ∂K von K bestehe aus m –dimensionalen linearen Mannigfaltigkeiten (Punkte, Geradenstücke, Ebenenstücke), $0 \leq m \leq d-1$, die als m –Seitenflächen bezeichnet werden. Die $(d-1)$ –Seitenflächen heißen einfach Seiten, die 0–Seitenflächen sind die Eckpunkte und die 1–Seitenflächen die Kanten.

Sei $s \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Auf K sei ein endlich–dimensionaler Raum $P(K) \subset C^s(K)$ definiert mit $\dim P(K) = N_K$. Im allgemeinen wird $P(K)$ ein Polynomraum sein.

Beispiel 10.1 Sei $P(K) = P_1(K)$, der Raum aus linearen Polynomen

$$a_0 + \sum_{i=1}^d a_i x_i.$$

Man hat $d+1$ unbekannte Koeffizienten a_i , $i = 0, \dots, d$, sodass $\dim P_1(K) = d+1$.
□

Weiter seien lineare und stetige Funktionale $\Phi_{K,1}, \dots, \Phi_{K,N_K} : C^s(K) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben, die linear unabhängig sind.

Beispiel 10.2 Es gibt unterschiedliche Typen von linearen und stetigen Funktionalen, die im Rahmen von FEM genutzt werden:

- Punktauswertung: $\Phi(v) = v(\mathbf{x})$,
- Auswertung der ersten Ableitung: $\Phi(v) = \partial_i v(\mathbf{x})$,

- Auswertung der Normalableitung auf einer Seite E von K : $\Phi(v) = \nabla v(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$, \mathbf{n} ist die Einheitsnormale an E , die nach außen zeigt,
- Integralmittelwerte über K : $\Phi(v) = \frac{1}{|K|} \int_K v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}$,
- Integralmittelwerte über Seitenflächen: $\Phi(v) = \frac{1}{|E|} \int_E v(\mathbf{s}) \, ds$.

□

Der Parameter s muss so gewählt sein, dass die Funktionale $\Phi_{K,1}, \dots, \Phi_{K,N_K}$ stetig sind. Wenn beispielsweise ein Funktional die Auswertung einer partiellen Ableitung oder der Normalableitung erfordert, dann muss mindestens $s = 1$ gewählt werden. Für die anderen Funktionale reicht $s = 0$.

Die nächste Forderung ist die Unisolvenz des Raumes $P(K)$ bezüglich der Funktionale $\Phi_{K,1}, \dots, \Phi_{K,N_K}$.

Definition 10.3 Der Raum $P(K)$ heißt unisolvent bezüglich der Funktionale $\Phi_{K,1}, \dots, \Phi_{K,N_K}$ falls es zu jedem $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{N_K}$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_{N_K})^T$ genau ein $p \in P(K)$ mit

$$\Phi_{K,i}(p) = a_i, \quad 1 \leq i \leq N_K$$

gibt

□

Für jeden Vektor $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{N_K}$ gibt es genau ein Urbild in $P(K)$, so dass das Bild des i -ten Funktionals gleich der i -ten Komponente des Bildvektors ist.

Wählt man insbesondere die Einheitsvektoren für \mathbf{a} , so folgt aus der Unisolvenz die Existenz von $\{\phi_{K,i}\}_{i=1}^{N_K}$ mit $\phi_{K,i} \in P(K)$ und

$$\Phi_{K,i}(\phi_{K,j}) = \delta_{ij}.$$

Damit bilden die $\{\phi_{K,i}\}_{i=1}^{N_K}$ eine Basis von $P(K)$. Im Rahmen der FEM spricht man von einer lokalen Basis.

Ist eine beliebige Basis $\{p_i\}_{i=1}^{N_K}$ von $P(K)$ bekannt, kann die lokale Basis durch das Lösen eines Gleichungssystems bestimmt werden. Dazu setzt man

$$\phi_{K,j} = \sum_{k=1}^{N_K} c_{jk} p_k, \quad c_{jk} \in \mathbb{R},$$

und löst

$$\Phi_{K,i}(\phi_{K,j}) = \sum_{k=1}^{N_K} c_{jk} a_{ik} = \delta_{ij}, \quad i = 1, \dots, N_K, \quad a_{ik} = \Phi_{K,i}(p_k).$$

Auf Grund der Unisolvenz ist die Matrix $A = (a_{ik})$ regulär und die Koeffizienten c_{jk} sind eindeutig bestimmt.

Beispiel 10.4 Wir betrachten das Referenzdreieck \hat{K} mit den Ecken $(0,0)$, $(1,0)$ und $(0,1)$. Ein linearer Raum auf \hat{K} wird durch die Funktionen

$$1, \hat{x}, \hat{y}$$

aufgespannt. Nehmen wir nun als Funktionale die Auswertung der Funktion in den Eckpunkten des Dreiecks, so sind die obigen Funktionen keine lokale Basis, weil die Funktion 1 in keinem Eckpunkt verschwindet.

Betrachten wir zunächst den Punkt $(0,0)$. Die lineare Basisfunktion

$$a\hat{x} + b\hat{y} + c,$$

die in $(0, 0)$ den Wert 1 annehmen und in den anderen Eckpunkten verschwinden soll, muss folgende Gleichungen erfüllen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die Lösung ist $a = -1, b = -1, c = 1$. Die anderen lokalen Basisfunktionen sind gerade \hat{x} und \hat{y} , womit die lokale Basis die Gestalt

$$1 - \hat{x} - \hat{y}, \hat{x}, \hat{y}$$

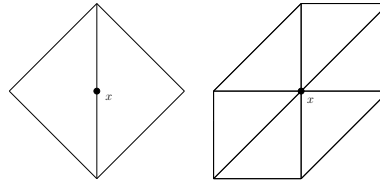
besitzt. □

Zur Definition globaler Finite-Element-Räume betrachten wir eine Unterteilung (Triangulierung) \mathcal{T}_h des polyhedralen Gebiets Ω in abgeschlossene Polyeder K mit zugehörigen lokalen Räumen $P(K)$. Die Polyeder K werden Gitterzellen genannt und ihre Vereinigung Gitter. Eine Triangulierung eines polyhedral berandeten Gebiets Ω wird regulär genannt falls:

- die Vereinigung aller Gitterzellen gleich $\overline{\Omega}$ ist,
- der Durchschnitt zweier Gitterzellen ist entweder leer oder eine gemeinsame m -Seitenfläche, $m \in \{0, \dots, d-1\}$.

Weiter seien $\Phi_1, \dots, \Phi_N : C^s(\overline{\Omega}) \rightarrow \mathbb{R}$ stetige lineare Funktionale vom gleichen Typ wie im Beispiel 10.2. Die Einschränkung der Funktionale auf $C^s(K)$ erzeugt lokale Funktionale $\Phi_{K,1}, \dots, \Phi_{K,N_K}$, die als unisolvent in $P(K)$ vorausgesetzt werden. Mit ω_i werden diejenigen Gitterzellen bezeichnet, auf denen es eine Funktion gibt, für die das Funktional Φ_i nicht verschwindet.

Beispiel 10.5 Sei Φ_i die Punktauswertung in $\mathbf{x} \in K$. Liegt \mathbf{x} im Inneren von K , dann ist $\omega_i = K$. Liegt \mathbf{x} auf einer Seite von K , aber nicht in einem Eckpunkt, dann ist ω_i die Vereinigung von K und der anderen Gitterzelle, deren Rand diese Seitenfläche enthält. Liegt \mathbf{x} in einem Eckpunkt von K , dann ist ω_i die Vereinigung aller Gitterzellen, die ebenfalls diesen Eckpunkt besitzen.



□

Definition 10.6 Eine Funktion v definiert auf Ω mit $v|_{\text{int}(K)} \in P(K)$, $\text{int}(K) = K \setminus \partial K$, heißt stetig bezüglich Φ_i , falls

$$\Phi_i(v|_{K_1}) = \Phi_i(v|_{K_2})$$

für alle $K_1, K_2 \in \omega_i$.

Der Raum

$$S = \left\{ v \in L^\infty(\Omega) : v|_{\text{int}(K)} \in P(K) \text{ und } v \text{ ist stetig bezüglich } \Phi_i, i = 1, \dots, N \right\}$$

heißt Finite-Element-Raum. □

Die sogenannte globale Basis $\{\phi_i\}_{i=1}^N$ des Raumes S ist definiert durch die Bedingung

$$\phi_j \in S, \quad \Phi_i(\phi_j) = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, N.$$

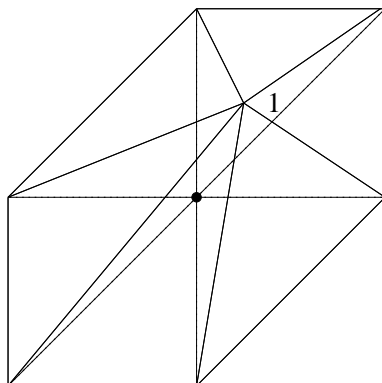


Abbildung 10.1: Globale, stückweise lineare Basisfunktion.

In Abbildung 10.1 ist beispielsweise eine globale, stückweise lineare Basisfunktion dargestellt.

Auf jeder Gitterzelle stimmt eine globale Basisfunktion mit einer lokalen Basisfunktion überein. Daraus folgt die Eindeutigkeit der globalen Basisfunktion.

Für viele Finite-Element-Räume folgt aus der Stetigkeit bezüglich $\{\Phi_i\}_{i=1}^N$ auch die Stetigkeit der Finite-Element-Funktionen. Nur in diesem Fall kann von Werten einer solchen Funktion auf den Seitenflächen gesprochen werden.

10.3 Parameterische Finite-Elemente

Im vorangegangenen Abschnitt wurden sehr allgemeine Finite-Element-Räume eingeführt. Zum Beispiel sind Gitter mit unterschiedlichen Typen von Gitterzellen erlaubt, beispielsweise Dreiecke und Vierecke im selben Gitter. Wir wollen jetzt spezieller die sogenannten parametrischen Finite-Elemente betrachten. Für diese existiert eine geschlossene Theorie.

In der parametrischen Definition von Finite-Elementen geht man von einer Referenzgitterzelle \hat{K} mit einem lokalen Raum $P(\hat{K})$ und Funktionalen $\hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_N$ sowie einer Klasse regulärer Transformationen $\{F_K : \hat{K} \rightarrow K\}$ aus. Die Bilder $\{K\}$ bilden die Menge der zulässigen Gitterzellen. Die lokalen Räume sind durch

$$P(K) = \left\{ p : p = \hat{p} \circ F_K^{-1}, \hat{p} \in \hat{P}(\hat{K}) \right\} \quad (10.7)$$

definiert und die lokalen Funktionale durch

$$\Phi_{K,i}(v(\mathbf{x})) = \hat{\Phi}_i(v(F_K(\hat{\mathbf{x}}))), \quad (10.8)$$

wobei $\hat{\mathbf{x}} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_d)^T$ die Koordinaten der Referenzzelle bezeichnet. Es gilt $\mathbf{x} = F_K(\hat{\mathbf{x}})$.

10.4 Finite-Elemente auf Dreiecken und Tetraedern

Ein d -Simplex $K \subset \mathbb{R}^d$, ist die konvexe Hülle von $d+1$ Punkten $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_{d+1} \in \mathbb{R}^d$, die die Eckpunkte von K bilden. Der Simplex K sei nichtdegeneriert, d.h. sein d -dimensionales Maß ist positiv. Die Nichtdegeneriertheit von K ist äquivalent zur

Regularität der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,d+1} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,d+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{d1} & a_{d2} & \cdots & a_{d,d+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbf{a}_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{di})^T$ ist. *Übungsaufgabe* Wir setzen immer voraus, das von uns betrachtete Simplex nichtdegeneriert sind.

Da K die konvexe Hülle der Punkte $\{\mathbf{a}_i\}_{i=1}^{d+1}$ ist, kann K folgendermaßen parametrisiert werden

$$K = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} = \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i \mathbf{a}_i, 0 \leq \lambda_i \leq 1, \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1 \right\}.$$

Die Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_{d+1}$ in dieser Darstellung heißen baryzentrische Koordinaten von $\mathbf{x} \in K$. Nach Definition, erhält man sie als Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\sum_{i=1}^{d+1} a_{ji} \lambda_i = x_j, \quad 1 \leq j \leq d, \quad \sum_{i=1}^{d+1} \lambda_i = 1.$$

Dieses Gleichungssystem hat die oben angegebene Matrix A . Da diese regulär ist, sind die baryzentrischen Koordinaten eindeutig bestimmt.

Beispiel 10.7 Man sieht sofort, dass der Eckpunkt \mathbf{a}_i des Simplex die baryzentrischen Koordinaten $\lambda_i = \delta_{ij}$ besitzt.

Der Schwerpunkt des Simplex ist durch

$$S_K = \frac{1}{d+1} \sum_{i=1}^{d+1} \mathbf{a}_i = \sum_{i=1}^{d+1} \frac{1}{d+1} \mathbf{a}_i$$

gegeben. Er besitzt demnach die baryzentrischen Koordinaten $\lambda_i = 1/(d+1)$, $i = 1, \dots, d+1$. \square

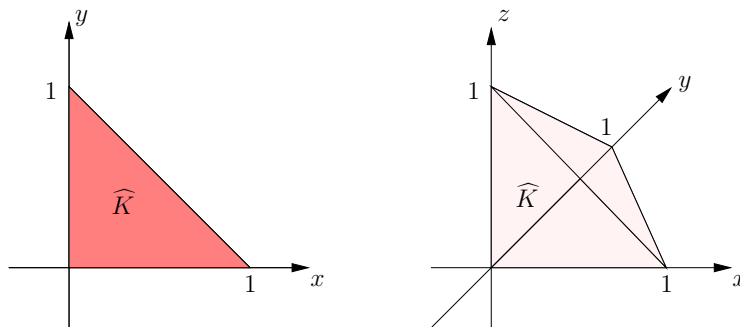
Für das lineare Gleichungssystem für die baryzentrischen Koordinaten erhält man die Lösung

$$\lambda_i = \sum_{j=1}^d a_{ij}^{-1} x_j + a_{i,d+1}^{-1}, \quad 1 \leq i \leq d+1,$$

wobei $A^{-1} = (a_{ij}^{-1})$ die inverse Matrix von A ist. (Das ist als Symbol zu verstehen und nicht als Invertierung der Komponenten.) Damit ist $\{\lambda_i\}_{i=1}^{d+1}$ eine Familie affin linearer Funktionen von \mathbf{x} . Diese sind linear unabhängig, da jede nichttriviale Linearkombination der $\{\lambda_i\}_{i=1}^{d+1}$ in irgendeinem Eckpunkt einen Wert ungleich Null annimmt. Jedes Polynom vom Grad kleiner gleich m in \mathbf{x} lässt sich als ein Polynom vom Grad kleiner gleich m in $\{\lambda_i\}_{i=1}^{d+1}$ darstellen und umgekehrt (Basistransformation).

Die Referenzgitterzelle für Dreiecke und Tetraeder ist das Einheitssimplex

$$\hat{K} = \left\{ \hat{\mathbf{x}} \in \mathbb{R}^d : \sum_{i=1}^d \hat{x}_i \leq 1, \hat{x}_i \geq 0, i = 1, \dots, d \right\}.$$



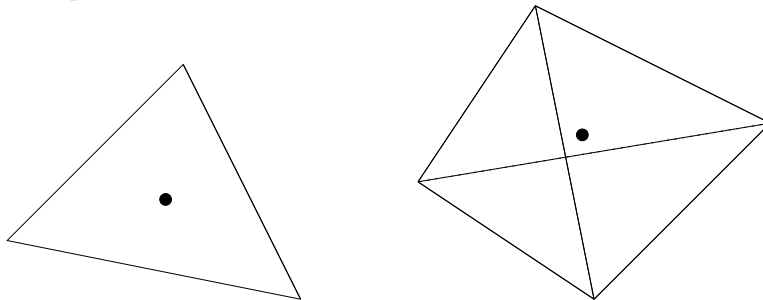
Die Klasse $\{F_K\}$ der zulässigen Transformationen sind die regulären affinen linearen Transformationen

$$F_K \hat{\mathbf{x}} = B \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}, \quad B \in \mathbb{R}^{d \times d}, \det(B) \neq 0, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d.$$

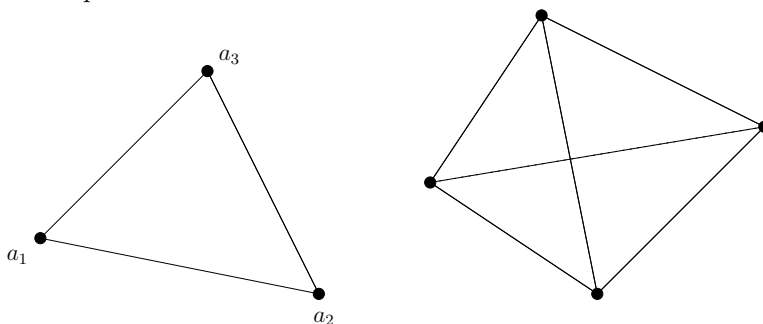
Die Bilder von F_K unter diesen Transformationen erzeugen die Menge der nichtdegenerierten Simplices $K \subset \mathbb{R}^d$. Wenn nun ein unisolventer Satz von Funktionalen auf dem Einheitssimplex gegeben ist, so erhält man mit (10.7) und (10.8) lokale Finite-Element-Räume auf jedem nichtdegenerierten Simplex. Die Gesamtheit der lokalen Räume heißt dann eine affine Familie simplizialer Finiterelemente.

Beispiel 10.8 Affine Familien Finiterelemente. Bei allen Beispielen sind die linearen Funktionalen auf der Referenzgitterzelle die Auswertungen der Funktion bzw. der Ableitungen in den Punkten mit den gleichen baryzentrischen Koordinaten. Finite-Elemente, die nur Funktionswerte in gewissen Punkten als Knotenfunktionale besitzen, werden Lagrange-Elemente genannt. Treten zudem Ableitungen als Knotenfunktionale auf, werden die Elemente Hermite-Elemente genannt.

- P_0 : *stückweise konstante Finite-Elemente*: Finite-Element-Raum besteht aus unstetigen Funktionen, $\dim P_0(K) = 1$, Funktional ist Funktionswert im Schwerpunkt S_K .

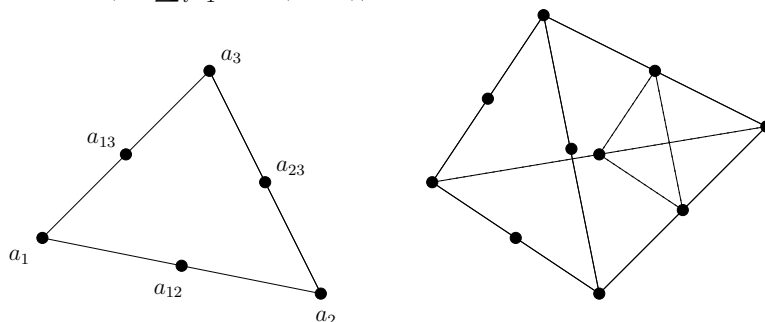


- P_1 : *konforme stückweise lineare Finite-Elemente*: Finite-Element-Raum ist Teilraum des $C(\bar{\Omega})$, $\dim P_1(K) = d + 1$, Funktionale sind Funktionswerte in den Eckpunkten der Gitterzelle.



Für die Funktionale $\Phi_i(v) = v(\mathbf{a}_i)$, $i = 1, \dots, d + 1$ haben wir die lokale Basis $\phi_i(\lambda) = \lambda_i$. Damit sind die Funktionale unisolvent bezüglich des Polynomraums $P_1(K)$. Nun wird gezeigt, dass die Elemente des zugehörigen Finite-Element-Raumes stetig sind. Seine K_1, K_2 zwei Gitterzellen mit einer gemeinsamen Seite E und sei $v \in P_1(= S)$. Die Fortsetzung von v_{K_1}, v_{K_2} auf E ist wieder eine lineare Funktion auf E . Diese lineare Funktion ist durch d Funktionale eindeutig bestimmt, die auf E definiert sind. Dafür kann man gerade die Funktionswerte in den Eckpunkten von E verwenden. Da die Funktionen aus S bezüglich der Funktionale stetig sind, muss $v_{K_1}|_E = v_{K_2}|_E$ gelten.

- P_2 : *konforme stückweise quadratische Finite-Elemente*: Finite-Element-Raum ist Teilraum des $C(\bar{\Omega})$, $\dim P_2(K) = (d + 1)(d + 2)/2$, Funktionale sind Funktionswerte in den Eckpunkten der Gitterzelle $-(d + 1)$, Funktionswerte in den Mittelpunkten der Kanten (jede Ecke ist mit jeder anderen verbunden) $-\sum_{i=1}^d i = d(d + 1)/2$



Zu den Funktionalen $\Phi_i(v) = v(\mathbf{a}_i)$, $i = 1, \dots, d + 1$ gehört die lokale Basis

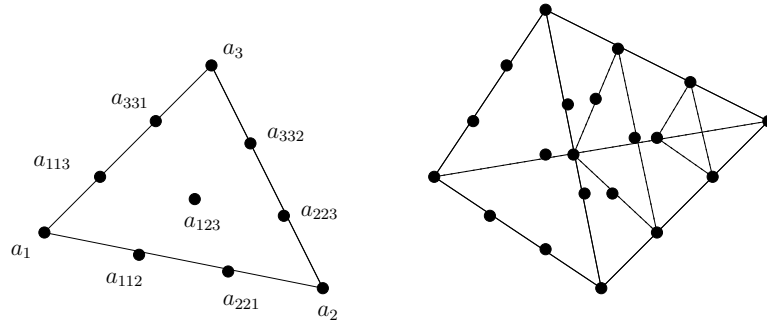
$$\phi_i(\lambda) = \lambda_i(2\lambda_i - 1).$$

Der Kantenmittelpunkt zwischen den Knoten \mathbf{a}_i und \mathbf{a}_j werde mit \mathbf{a}_{ij} bezeichnet. Die zugehörige lokale Basis ist

$$\phi_{ij} = 4\lambda_i\lambda_j, \quad i, j = 1, \dots, d + 1, \quad i < j.$$

Die Unisolvenzbedingung rechnet man direkt nach. Die Stetigkeit des zugehörigen Finite-Element-Raumes zeigt man genauso wie bei P_1 . Die Einschränkung einer quadratischen Funktion auf eine Seitenfläche ist wiederum quadratisch. Damit ist diese Funktion durch $d(d + 1)/2$ Funktionale auf E eindeutig bestimmt.

- P_3 : *konforme stückweise kubische Finite-Elemente*: Finite-Element-Raum ist Teilraum des $C(\bar{\Omega})$, $\dim P_3(K) = (d + 1)(d + 2)(d + 3)/6$, Funktionale sind Funktionswerte in den Eckpunkten der Gitterzelle $-(d + 1)$, zwei Funktionswerte auf den Kanten (jeweils nach jedem Drittel) $-2\sum_{i=1}^d i = d(d + 1)$, Funktionswert im Schwerpunkt der 2-Seitenflächen von K (jede 2-Seitenfläche von K wird durch drei Eckpunkte definiert, betrachte für jede Ecke alle möglichen Paare von anderen Eckpunkten, damit wird jede 2-Seitenfläche von K dreimal gezählt) $-(d + 1)(d - 1)d/6$.



Für die Funktionale

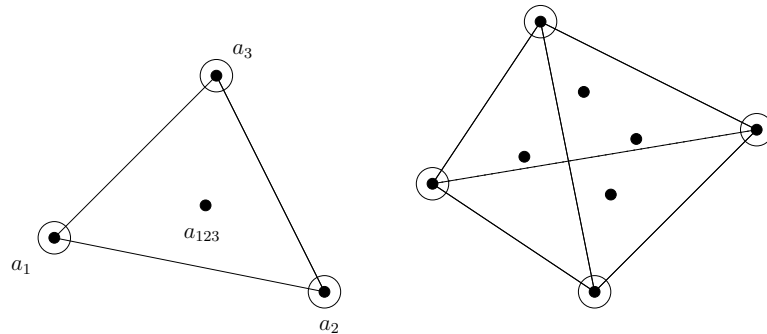
$$\begin{aligned}\Phi_i(v) &= v(\mathbf{a}_i), \quad i = 1, \dots, d+1, && \text{(Eckpunkte)} \\ \Phi_{ijj}(v) &= v(\mathbf{a}_{ijj}), \quad i, j = 1, \dots, d+1, i \neq j, && \text{(Punkte auf Kanten)} \\ \Phi_{ijk}(v) &= v(\mathbf{a}_{ijk}), \quad i = 1, \dots, d+1, i < j < k && \text{(Punkte auf 2-Seitenfl.)}\end{aligned}$$

lautet die lokale Basis

$$\phi_i(\lambda) = \frac{1}{2}\lambda_i(3\lambda_i - 1)(3\lambda_i - 2), \quad \phi_{ijj}(\lambda) = \frac{9}{2}\lambda_i\lambda_j(3\lambda_i - 1), \quad \phi_{ijk}(\lambda) = 27\lambda_i\lambda_j\lambda_k.$$

Die Funktion $\phi_{ijk}(\lambda)$ wird Gitterzellen-Blasenfunktion genannt.

- *kubisches Hermite-Element*: Finite-Element-Raum ist Teilraum des $C(\bar{\Omega})$, die Dimension ist $(d+1)(d+2)(d+3)/6$, Funktionale sind Funktionswerte in den Eckpunkten der Gitterzelle – $(d+1)$, Funktionswert im Schwerpunkt der 2-Seitenflächen von K – $(d+1)(d-1)d/6$, partielle Ableitungen in den Eckpunkten – $d(d+1)$.



Dieses Element bildet keine affine Familie im strengen Sinne, weil die Funktionale für die partiellen Ableitungen $\hat{\Phi}_i(\hat{v}) = \partial_i \hat{v}(\mathbf{0})$ auf der Referenzgitterzelle abgebildet werden auf die Funktionale $\Phi_i(v) = \partial_{\mathbf{t}_i} v(\mathbf{a})$, wobei $\mathbf{a} = F_K(\mathbf{0})$ und \mathbf{t}_i sind Kantenrichtungen die adjazent zu \mathbf{a} sind (\mathbf{a} ist ein Endpunkt dieser Kante). Das ist genug, um alle ersten Ableitungen zu kontrollieren. Aber bei der praktischen Implementierung dieses Finite-Elementes muss darauf geachtet werden.

Wegen der obigen Bemerkung werden die Ableitungen in Kantenrichtung vorgegeben und als Funktionale verwendet

$$\begin{aligned}\Phi_i(v) &= v(\mathbf{a}_i), && \text{(Eckpunkte)} \\ \Phi_{ij}(v) &= \nabla v(\mathbf{a}_i) \cdot (\mathbf{a}_j - \mathbf{a}_i), \quad i, j = 1, \dots, d-1, i \neq j, && \text{(Richt.-Abl.)} \\ \Phi_{ijk}(v) &= v(\mathbf{a}_{ijk}), \quad i < j < k, && \text{(2-Seitenfl.)}\end{aligned}$$

mit zugehöriger lokaler Basis

$$\begin{aligned}\phi_i(\lambda) &= -2\lambda_i^3 + 3\lambda_i^2 - 7\lambda_i \sum_{j < k, j \neq i, k \neq i} \lambda_j \lambda_k, \\ \phi_{ij}(\lambda) &= \lambda_i \lambda_j (2\lambda_i - \lambda_j - 1), \\ \phi_{ijk}(\lambda) &= 27\lambda_i \lambda_j \lambda_k.\end{aligned}$$

Den Beweis zur Unisolvenz findet man in der Literatur.

Die Stetigkeit wird nur für $d = 2$ gezeigt. Seien K_1, K_2 zwei Gitterzellen mit einer gemeinsamen Kante E , deren Tangentialeinheitsvektor mit \mathbf{t} bezeichnet wird. Seien V_1, V_2 die Endpunkte von E . Die Fortsetzungen $v|_{K_1}, v|_{K_2}$ auf E genügen den vier Bedingungen

$$v|_{K_1}(V_i) = v|_{K_2}(V_i), \quad \partial_{\mathbf{t}} v|_{K_1}(V_i) = \partial_{\mathbf{t}} v|_{K_2}(V_i), \quad i = 1, 2.$$

Da diese Fortsetzungen kubische Polynome sind, stimmen deren Werte auf E überein.

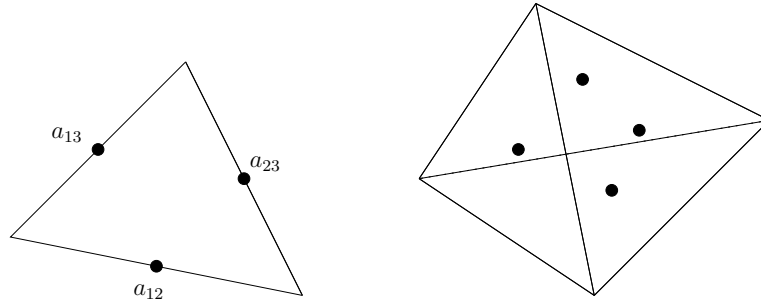
Das kubische Hermite-Finite-Element hat gegenüber dem Finite-Element P_3 einen Vorteil. Für $d = 2$ gilt nämlich für eine reguläre Triangulierung \mathcal{T}_h

$$\#(K) \approx 2\#(V), \quad \#(E) \approx 2\#(V),$$

wobei $\#(\cdot)$ die Anzahl der Dreiecke, Knotenpunkte und Kanten bezeichnet. Damit ist die Dimension von P_3 ungefähr $7\#(V)$, während die Dimension des kubischen Hermite-Finite-Elements ungefähr $5\#(V)$ ist. Dieser Unterschied erklärt sich daraus, dass die beiden Finite-Element-Räume verschieden sind. Beide Räume sind Räume stetiger Funktionen, aber die Funktionen des kubischen Hermite-Finite-Elements sind zusätzlich in den ersten Ableitungen in den Knotenpunkten stetig.

Man hat hier zwei unterschiedliche Finite-Element-Räume, deren lokale Polynomräume gleich sind (kubisch). Daran erkennt man die Bedeutung der Funktionale für die Definition eines globalen Finite-Element-Raums.

- P_1^{nc} : nichtkonformes lineares Finite-Element, Crouzeix-Raviart-Finite-Element [CR73], der Finite-Element-Raum besteht aus unstetigen Funktionen, $\dim P_1^{\text{nc}}(K) = (d + 1)$, Funktionale sind Funktionswerte in den Schwerpunkten der Seitenflächen, Finite-Element-Funktionen sind stetig in den Schwerpunkten der Seitenflächen. Äquivalent dazu ist, als Funktionale die Integralmittelwerte über die Seitenflächen zu nehmen. *Übungsaufgabe*



Zur Beschreibung dieses Finite-Elements verwenden wir die Notation

$$\Phi_i(v) = v(\mathbf{a}_{i-1, i+1}) \text{ für } d = 2, \quad \Phi_i(v) = v(\mathbf{a}_{i-2, i-1, i+1}) \text{ für } d = 3,$$

wobei die Punkte jeweils die Schwerpunkte der Seitenflächen mit den Eckpunkten der angegebenen Indizes sind. Dieses System ist unisolvent mit der Basis

$$\phi_i(\lambda) = 1 - d\lambda_i.$$

□

10.5 Finite-Elemente auf Rechtecken und Quadern

In diesem Abschnitt werden Finite-Elemente auf Rechtecken und Quadern betrachtet. Man findet in der Literatur zwei Referenzzellen, zum einen den Einheitswürfel

$[0, 1]^d$ und zum anderen den großen Einheitswürfel $[-1, 1]^d$. Im Grunde genommen ist es egal welche Referenzzelle man wählt. Wir nehmen den großen Einheitswürfel $\hat{K} = [-1, 1]^d$. Die Klasse der zulässigen Referenztransformationen $\{F_K\}$ besteht aus den regulären affin linearen Transformationen der Form

$$F_K \hat{\mathbf{x}} = B \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}, \quad B \in \mathbb{R}^{d \times d}, \quad \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d,$$

mit der Diagonalmatrix B . Diese Transformationen bilden \hat{K} auf d -Rechtecke ab. Es wäre ebenfalls möglich, allgemeine affin lineare Transformationen zu verwenden. Die Klasse der zulässigen Gitterzellen bestünde dann aus Parallelepipeden (Parallelogramme). Genauso wie Rechtecke, ist auch die Klasse der Parallelogramme zu klein, um allgemeine Gebiete zu unterteilen. Deshalb beschränken wir uns hier auf Rechtecke. Der Fall allgemeiner Vierecke und Hexaeder wird im Abschnitt 10.6 kurz angeschnitten.

Man definiert die Polynomräume

$$Q_k = \text{span}\{\mathbf{x}^\alpha : 0 \leq \alpha_i \leq k, \text{ für } i = 1, \dots, d\}.$$

Beispiel 10.9 Der Raum Q_1 besteht aus allen d -linearen Polynomen. Sei insbesondere $d = 2$. Dann ist

$$Q_1 = \text{span}\{1, x, y, xy\},$$

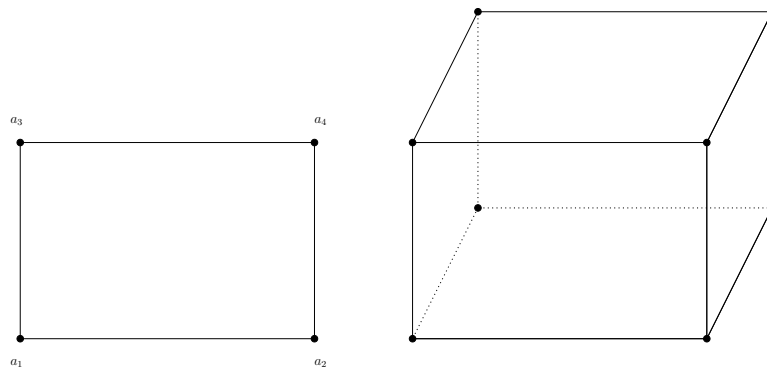
währendessen

$$P_1 = \text{span}\{1, x, y\}$$

ist. □

Beispiel 10.10 Finite-Elemente auf Rechtecken und Quadern. Die hier vorgestellten Finiten-Elemente können als Tensorprodukte eindimensionaler Finite-Elemente betrachtet werden. Demnach können die Basisfunktionen als Produkte eindimensionaler Funktionen geschrieben werden.

- Q_0 : *stückweise konstante Finite-Elemente*: Finite-Element-Raum besteht aus un stetigen Funktionen, $\dim Q_0(K) = 1$, Funktional ist Funktionswert im Schwerpunkt S_K .
- Q_1 : *konforme stückweise d -lineare Finite-Elemente*: Finite-Element-Raum ist Teilraum des $C(\bar{\Omega})$, $\dim Q_1(K) = 2^d$, Funktionale sind Funktionswerte in den Eckpunkten der Gitterzelle.



Eindimensionale Basisfunktionen auf dem Referenzintervall zur Produktbildung:

$$\hat{\phi}_1(\hat{x}) = \frac{1}{2}(1 - \hat{x}), \quad \hat{\phi}_2(\hat{x}) = \frac{1}{2}(1 + \hat{x}).$$

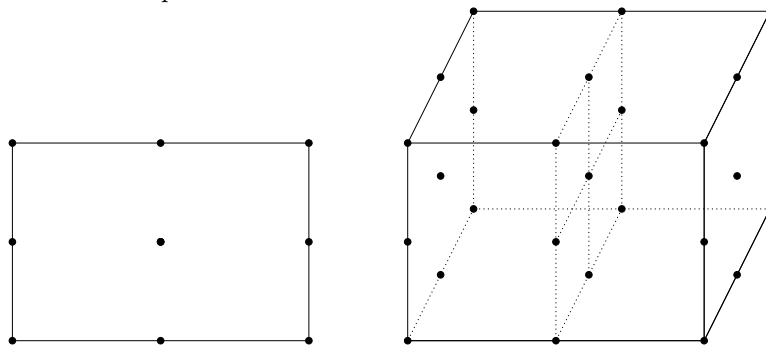
Die Basisfunktionen in zwei Dimensionen sind dann

$$\hat{\phi}_1(\hat{x})\hat{\phi}_1(\hat{y}), \quad \hat{\phi}_1(\hat{x})\hat{\phi}_2(\hat{y}), \quad \hat{\phi}_2(\hat{x})\hat{\phi}_1(\hat{y}), \quad \hat{\phi}_2(\hat{x})\hat{\phi}_2(\hat{y}).$$

Übungsaufgabe: Basisfktn. auf $Q_1(K)$, $K = (a, b) \times (c, d)$

Die Stetigkeit des Finite-Element-Raumes beweist man wie bei den simplizialen Finite-Elementen, denn die Einschränkung einer Funktion aus $Q_k(K)$ auf eine Seitenfläche E ist eine Funktion des Polynomraumes $Q_k(E)$ auf der Seitenfläche, $k \geq 1$.

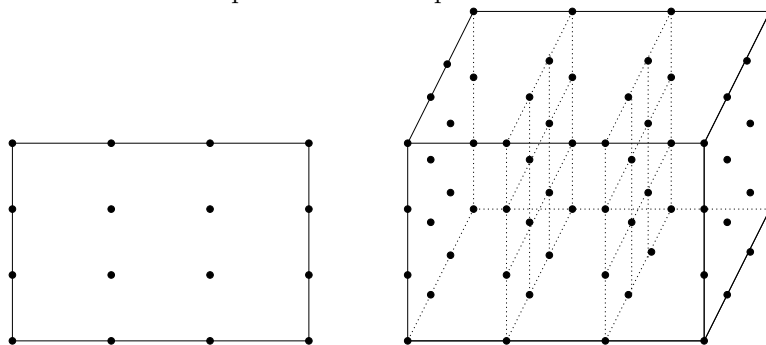
- Q_2 : konforme stückweise d -quadratische Finite-Elemente: Finite-Element-Raum ist Teilraum des $C(\bar{\Omega})$, $\dim Q_2(K) = 3^d$, Funktionale in einer Dimension sind Funktionswerte an den Intervallenden und im Mittelpunkt. In d Dimensionen ist es das entsprechende Tensorprodukt.



Die eindimensionalen Basisfunktionen auf dem Referenzintervall sind

$$\hat{\phi}_1(\hat{x}) = -\frac{1}{2}\hat{x}(1-\hat{x}), \quad \hat{\phi}_2(\hat{x}) = (1-\hat{x})(1+\hat{x}), \quad \hat{\phi}_3(\hat{x}) = \frac{1}{2}(1+\hat{x})\hat{x}.$$

- Q_3 : konforme stückweise d -kubische Finite-Elemente: Finite-Element-Raum ist Teilraum des $C(\bar{\Omega})$, $\dim Q_3(K) = 4^d$, Funktionale in einer Dimension sind Funktionswerte an den Intervallenden und in den Punkten $\hat{x} = -1/3$, $\hat{x} = 1/3$. In d Dimensionen ist es das entsprechende Tensorprodukt.



Die eindimensionalen Basisfunktionen auf dem Referenzintervall sind

$$\begin{aligned} \hat{\phi}_1(\hat{x}) &= -\frac{1}{16}(3\hat{x}+1)(3\hat{x}-1)(\hat{x}-1), \\ \hat{\phi}_2(\hat{x}) &= \frac{9}{16}(\hat{x}+1)(3\hat{x}-1)(\hat{x}-1), \\ \hat{\phi}_3(\hat{x}) &= -\frac{9}{16}(\hat{x}+1)(3\hat{x}+1)(\hat{x}-1), \\ \hat{\phi}_4(\hat{x}) &= \frac{1}{16}(3\hat{x}+1)(3\hat{x}-1)(\hat{x}+1). \end{aligned}$$

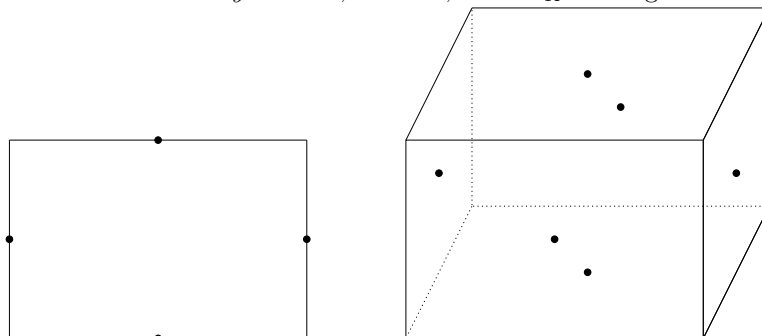
- Q_1^{rot} : rotiertes, unstetiges Q_1 -Finites-Element, Rannacher-Turek-Element [RT92]: Finite-Elemente-Raum besteht aus unstetigen Funktionen, $\dim Q_1^{\text{rot}}(K) = 2d$. Die Basis auf der Referenzgitterzelle ist

$$\begin{aligned} Q_1^{\text{rot}}(\hat{K}) &= \{ \hat{p} : \hat{p} \in \text{span}\{1, \hat{x}, \hat{y}, \hat{x}^2 - \hat{y}^2\} \} && \text{für } d = 2, \\ Q_1^{\text{rot}}(\hat{K}) &= \{ \hat{p} : \hat{p} \in \text{span}\{1, \hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \hat{x}^2 - \hat{y}^2, \hat{y}^2 - \hat{z}^2\} \} && \text{für } d = 3. \end{aligned}$$

Man beachte, dass der transformierte Raum

$$Q_1^{\text{rot}}(K) = \{p = \hat{p} \circ F_K^{-1}, \hat{p} \in Q_1^{\text{rot}}(\hat{K})\}$$

Polynome der Form $ax^2 - by^2$ enthält, wobei a, b von F_K abhängen.



Die Funktionale sind die Werte in den Schwerpunkten der Seitenflächen. Für $d = 2$ ist die lokale Basis auf der Referenzzelle gegeben durch

$$\phi_1(\hat{x}, \hat{y}) = -\frac{3}{8}(\hat{x}^2 - \hat{y}^2) - \frac{1}{2}\hat{y} + \frac{1}{4},$$

$$\phi_2(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{3}{8}(\hat{x}^2 - \hat{y}^2) + \frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{4},$$

$$\phi_3(\hat{x}, \hat{y}) = -\frac{3}{8}(\hat{x}^2 - \hat{y}^2) + \frac{1}{2}\hat{y} + \frac{1}{4},$$

$$\phi_4(\hat{x}, \hat{y}) = \frac{3}{8}(\hat{x}^2 - \hat{y}^2) - \frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{4}.$$

□

10.6 Parametrische Elemente auf allgemeinen Vierecken

Das Bild einer affin linearen Transformation des Einheitswürfels $[-1, 1]^d$, $d \in \{2, 3\}$, ist ein Parallelogramm. *Übungsaufgabe, zeige parallele Strecken werden auf parallele Strecken abgebildet* Wenn man Finite-Elemente auf allgemeinen Vierecken betrachten will, muss die Klasse der zulässigen Transformationen vergrößert werden.

Das einfachste parametrische Finite-Element auf Vierecken verwendet bilineare Abbildungen. Sei $\hat{K} = [-1, 1]^2$ das Einheitsquadrat und seien

$$F_K(\hat{\mathbf{x}}) = \begin{pmatrix} F_K^1(\hat{\mathbf{x}}) \\ F_K^2(\hat{\mathbf{x}}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{12}\hat{x} + a_{13}\hat{y} + a_{14}\hat{x}\hat{y} \\ a_{21} + a_{22}\hat{x} + a_{23}\hat{y} + a_{24}\hat{x}\hat{y} \end{pmatrix} \quad F_K^i \in Q_1, \quad i = 1, 2,$$

bilineare Abbildungen von \hat{K} auf die Klasse der zulässige Vierecke, die durch folgende Bedingung gekennzeichnet ist: Eine Gitterzelle K ist zulässig, wenn

- die Seitenlängen von K sind größer als Null,
- die inneren Winkel von K sind kleiner als π . Daraus folgt, dass K konvex ist.

In dieser Klasse sind zum Beispiel Trapeze und Rhomben enthalten.

Die Funktionen des lokalen Raumes $P(K)$ auf der Gitterzelle K sind durch $p = \hat{p} \circ F_K^{-1}$ definiert. Es sind rationale Funktionen! Da die Einschränkung von F_K auf eine Kante von \hat{K} eine affine Abbildung ist, sind zum Beispiel im Falle des Q_1 -Finite-Elements die Funktionen auf K lineare Funktionen auf jeder Kante von K . Daher besteht der zugehörige Finite-Element-Raum aus stetigen Funktionen.

Nach dem gleichen Verfahren lassen sich auch finite Elemente höherer Ordnung auf Vierecken konstruieren. Da es dabei jedoch einige Probleme bei der Abschätzung des Interpolationsfehlers gibt, wird darauf nicht weiter eingegangen.