

Saarbrücken, 16.01.2007

Übungsaufgaben zur Vorlesung Theorie und Numerik partieller Differentialgleichungen

Serie 12

abzugeben vor der Vorlesung am 25.01.2007

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1. Aufgabe :
Sei $P(K)$ unisolvent bezüglich der Funktionale $\{\Phi_{K,i}\}_{i=1}^{N_K}$. Man zeige, dass die Menge $\{\phi_{K,i}\}_{i=1}^{N_K}$ mit $\Phi_{K,i}(\phi_{K,j}) = \delta_{ij}$ eine Basis von $P(K)$ bildet.

2. Aufgabe :
Betrachte das Referenzdreieck \widehat{K} mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 1)$. Der Polynomraum zweiten Grades wird von

$$1, \widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{x}\widehat{y}, \widehat{x}^2, \widehat{y}^2$$

aufgespannt. Als Funktionale werden die Funktionswerte in den Eckpunkten und den Seitenmittelpunkten genommen. Man berechne die lokale Basis zu diesen Funktionalen.

3. Aufgabe :
Betrachte das Referenzviereck $\widehat{K} = [-1, 1]^2$ und den von den Funktionen

$$1, \widehat{x}, \widehat{y}, \widehat{x}^2 - \widehat{y}^2$$

aufgespannten Raum. Als Funktionale werden die Integralmittelwerte über die Kanten von \widehat{K} genommen

$$\Phi(v) = \frac{1}{\text{meas}(E)} \int_E v(s) ds.$$

Man berechne die lokale Basis zu diesen Funktionalen.

4. Aufgabe :
Sei K ein Dreieck im \mathbb{R}^2 mit den Eckpunkten (x_i, y_i) , $i = 1, 2, 3$. Man berechne die affine Transformation des Referenzdreiecks \widehat{K} auf K , die $(0, 0)$ auf (x_1, y_1) , $(1, 0)$ auf (x_2, y_2) und $(0, 1)$ auf (x_3, y_3) abbildet. Mit welcher geometrischen Eigenschaft von K steht die Determinante der Transformationsmatrix in Verbindung?

5. Aufgabe :

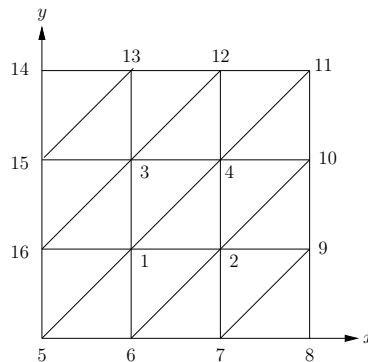
Diese Aufgabe ist erst bis zum 01.02.2007 zu erledigen. Man schreibe ein Matlab-Programm zur Lösung von

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f & \text{in } \Omega = (0, 1)^2, \\ u &= g & \text{auf } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Die rechte Seite und die Randbedingungen seien so gewählt, dass

$$u(x, y) = -13x^2y^4 + 11 \cos(x^2y)$$

die Lösung der obigen partiellen Differentialgleichung ist. Zur Diskretisierung nehme man P_1 -Finite-Elemente auf folgendem Gitter



Die Gitterweite sei

$$h_x = h_y = h = 2^{-n} \quad n = 2, 3, 4, \dots, 8.$$

Die Matrix soll im **sparse**-Format gespeichert werden. Die Numerierung der Knoten im Gitter soll dabei analog zur Skizze erfolgen, d.h. die inneren Knoten werden lexikographisch angeordnet und dann kommen die Randknoten entgegen der Uhrzeigerrichtung bei $(0, 0)$ beginnend.

Man werte

$$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)} \quad \text{und} \quad \|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2(\Omega)}$$

aus.

Hinweise: Das FEM-Problem lautet: Finde $u_h \in P_1 +$ Randbedingung mit

$$(\nabla u_h, \nabla v_h) = (f, v_h) \quad \forall v_h \in P_1 + \text{Null-Randbedingung}.$$

Die Integrale kann man als Summe über die Gitterzellen schreiben, zum Beispiel

$$(\nabla u_h, \nabla v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\nabla u_h, \nabla v_h)_K.$$

Deshalb nutzt man bei der FEM zum Assemblieren der Matrizen und der rechten Seite eine gitterzellen-basierte Herangehensweise (und nicht knoten-basiert wie bei der FDM). Man

- schreibe also eine Schleife über die Gitterzellen,
- berechne die an die jeweilige Gitterzelle K anliegenden Nummern der Unbekannten (das sind bei P_1 die Knotennummern),
- berechne die lokalen Aufdatierungen der Matrixeinträge

$$(\phi_j, \phi_i)_K$$

und addiere diese zur globalen Matrix

$$a_{ij} := a_{ij} + (\phi_j, \phi_i)_K,$$

analog mit der rechten Seite.

Die Zeilen, wo die Knoten mit den Randbedingungen sind, ersetze man mit Diagonale gleich Eins, sonst Null und im entsprechenden Eintrag auf der rechten Seite setze man die Randbedingung ein.

Nun hat man das Gleichungssystem, dessen Lösung die Koeffizienten der Finite-Element-Lösung u_h ergibt.

Auch bei der Berechnung der Fehler geht man wie beim Assemblieren der Matrix vor: Man

- schreibe also eine Schleife über die Gitterzellen,
- berechne die an die jeweilige Gitterzelle K anliegenden Nummern der Unbekannten (das sind bei P_1 die Knotennummern),
- berechne die Quadrate lokalen Fehler

$$l2 := (u - u_h, u - u_h), \quad h1 := (\nabla u - \nabla u_h, \nabla u - \nabla u_h),$$

(Formel für ∇u_h siehe Aufgabe 1)

- datiere die Quadrate der globalen Fehler auf

$$L2 := L2 + l2, \quad H1 := H1 + h1.$$

Zum Schluss ziehe man die Wurzeln aus $L2$ und $H1$.

Zur numerischen Quadratur bei der Matrixassemblierung und der Fehlerberechnung verwende man die Seitenmittelpunktregel

$$\int_K f(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \approx \frac{|K|}{3} (f(\mathbf{x}_1) + f(\mathbf{x}_2) + f(\mathbf{x}_3)),$$

wobei $|K|$ der Flächeninhalt des Dreiecks K ist und $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$ sind die Mittelpunkte der Kanten von K .