FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 02.05.2008

Theoretische Übungsaufgaben zur Vorlesung Praktische Mathematik

Ablauf der Übungen und Kriterien zur Erlangung der Zulassung zur Klausur:

- wurden in der Vorlesung am 16.04.2008 vorgestellt,
- sind auf der Homepage der Vorlesung
  `http://www.math.uni-sb.de/ag/john/LEHRE/lehre_2.html`
  abrufbar

Serie 03

abzugeben vor der Vorlesung am Mittwoch, dem 14.05.2008

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

1.
   (a) Man zeige, dass eine l^p–Vektornorm und ihre induzierte Matrixnorm verträglich sind.
   (b) Man zeichne die Einheitskreise
   $$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \ : \ \|\mathbf{x}\|_p \leq 1\}$$
   für $p \in \{1, 2, \infty\}$.

4 Punkte

2. Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, d.h. $A^T = A^{-1}$ und $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$. Man zeige, dass
   $$\|AB\|_2 = \|B\|_2$$
   gilt. (Insbesondere für $m = 1$, d.h. B ist ein Vektor b, gilt $\|Ab\|_2 = \|b\|_2$.)

4 Punkte

3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit. Man zeige, dass für die Spektralkonditionszahl gilt

$$\kappa_2(A) = \frac{\lambda_{\max}(A)}{\lambda_{\min}(A)},$$

wobei $\lambda_{\max}(A)$ der größte und $\lambda_{\min}(A)$ der kleinste Eigenwert von A sind.

Hinweis: Sei λ ein Eigenwert von A. Man beweise zuerst, dass dann λ^2 ein Eigenwert von A^2 ist und λ^{-1} ein Eigenwert von A^{-1}. Danach nutze man die allgemeine Formel für die Spektralkonditionszahl. **4 Punkte**

4. Quadratische $n \times n$-Matrizen G_j der Form

$$G_j := \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & -\ell_{j+1,j} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & -\ell_{n,j} & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

heißen *Frobenius–Matrizen*. Man zeige:

a) G_j ist nicht singulär.

b) G_j^{-1} ist gegeben durch

$$G_j^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & \ell_{j+1,j} & 1 & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & & \ell_{n,j} & & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

c) Man berechne das Produkt $G_1^{-1}G_2^{-1}\cdots G_{n-1}^{-1}$.

4 Punkte