

Anhang A

Interpolation

Die variationelle Formulierung der partiellen Differentialgleichungen, die wir betrachten, benutzt Funktionen aus Sobolev-Räumen. Wir wollen die Lösung mit Hilfe der Ritzschen Methode und endlich-dimensionaler Finite-Element-Räume approximieren. Der Fehler in der durch den Raum V induzierten Norm hängt davon ab, wie gut man Funktionen aus Sobolev-Räumen überhaupt mit Funktionen aus Finite-Element-Räumen annähern kann, siehe zum Beispiel das Lemma von Cea, Abschätzung (5.6). Die Approximationsgüte von Finite-Element-Räumen wird in diesem Abschnitt untersucht.

A.1 Das Bramble-Hilbert-Lemma

Sei Ω ein beschränktes Gebiet des \mathbb{R}^d mit Lipschitz-Rand. Wir beginnen mit grundlegenden Prinzipien der Polynominterpolation in Sobolev-Räumen.

Lemma A.1 Für jeden Multiindex α mit $|\alpha| \leq m$ sei ein $a_\alpha \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes Polynom $p \in P_m(\Omega)$ mit

$$\int_{\Omega} \partial_\alpha p(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = a_\alpha, \quad |\alpha| \leq m.$$

Beweis: Jedes Polynom aus $P_m(\Omega)$ hat die Gestalt

$$p(\mathbf{x}) = \sum_{|\beta| \leq m} b_\beta \mathbf{x}^\beta.$$

Einsetzen dieser Darstellung in die Bedingungen ergibt ein lineares Gleichungssystem $M\mathbf{b} = \mathbf{a}$, mit

$$M = (M_{\alpha\beta}), \quad M_{\alpha\beta} = \int_{\Omega} \partial_\alpha \mathbf{x}^\beta \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{b} = (b_\beta), \quad \mathbf{a} = (a_\alpha),$$

für $|\alpha|, |\beta| \leq m$. Das ist ein quadratisches Gleichungssystem, welches genau dann eine eindeutige Lösung besitzt, wenn M regulär ist.

Angenommen, M ist singular. Dann besitzt das zugehörige homogene Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung. Das heißt, es gibt ein Polynom $q \in P_m(\Omega) \setminus \{0\}$ mit

$$\int_{\Omega} \partial_\alpha q(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \quad \text{für alle } |\alpha| \leq m.$$

Das Polynom q besitzt die Darstellung $q(\mathbf{x}) = \sum_{|\beta| \leq m} c_\beta \mathbf{x}^\beta$. Wähle nun ein $c_\beta \neq 0$ mit maximalem $|\beta|$. Dann gilt $\partial_\beta q(\mathbf{x}) = c_\beta = \text{const} \neq 0$, was dem Verschwinden des Integrals für $\partial_\beta q(\mathbf{x})$ widerspricht. ■

Das Lemma besagt, dass ein Polynom eindeutig bestimmt ist, wenn man für jede Ableitung eine Bedingung an das Integral über Ω stellt.

Das nächste Lemma beinhaltet eine Ungleichung vom Poincaré-Typus. Dabei bezeichnen wir mit $D^k v$, $k \in \mathbb{N}$, die totale Ableitung zur Ordnung k der Funktion v , z.B. für $k = 1$ den Gradienten von v .

Lemma A.2 Sei Ω konvex und in einer Kugel vom Radius R enthalten. Seien $k, l \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq l$ und sei $p \in \mathbb{R}$ mit $p \in [1, \infty]$. Dann gilt für jedes $v \in W^{l,p}(\Omega)$, welches

$$\int_{\Omega} \partial_{\alpha} v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \text{ für alle } |\alpha| \leq l - 1$$

erfüllt, die Abschätzung

$$\|D^k v\|_{L^p(\Omega)} \leq c R^{l-k} \|D^l v\|_{L^p(\Omega)},$$

wobei die Konstante c nicht von Ω und von v abhängt.

Beweis: Im Fall $k = l$ braucht man nichts zu beweisen. Des weiteren genügt es, das Lemma für $k = 0$ und $l = 1$ zu beweisen, da der allgemeine Fall folgt, wenn man das Resultat dann auf $\partial_{\alpha} v$ anwendet.

Da Ω als konvex vorausgesetzt wurde, kann der Mittelwertsatz in der Form

$$v(\mathbf{x}) - v(\mathbf{y}) = \int_0^1 \nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, dt,$$

$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \Omega$ geschrieben werden. Integration dieser Beziehung bezüglich \mathbf{y} ergibt

$$v(\mathbf{x}) \int_{\Omega} d\mathbf{y} - \underbrace{\int_{\Omega} v(\mathbf{y}) \, d\mathbf{y}}_{=0} = \int_{\Omega} \int_0^1 \nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, dt \, d\mathbf{y},$$

wobei das eine Integral auf der linken Seite nach Voraussetzung an v verschwindet. Es folgt

$$v(\mathbf{x}) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \int_0^1 \nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}) \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \, dt \, d\mathbf{y}.$$

Nun werden die Cauchy-Schwarz-Ungleichung für Vektoren und die Abschätzung $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2 \leq 2R$ verwendet

$$|v(\mathbf{x})| \leq \frac{2R}{|\Omega|} \int_{\Omega} \int_0^1 \|\nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y})\|_2 \, dt \, d\mathbf{y}. \quad (\text{A.1})$$

Für $p < \infty$ wird diese Abschätzung mit p potenziert und bezüglich \mathbf{x} integriert. Man erhält durch Anwendung der Hölderschen Ungleichung mit $p^{-1} + q^{-1} = 1 \implies p/q - p = p(1/q - 1) = -1$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} &\leq \frac{cR^p}{|\Omega|^p} \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \int_0^1 \|\nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y})\|_2 \, dt \, d\mathbf{y} \right)^p \, d\mathbf{x} \\ &\leq \frac{cR^p}{|\Omega|^p} \int_{\Omega} \underbrace{\left[\left(\int_{\Omega} \int_0^1 1^q \, dt \, d\mathbf{y} \right)^{p/q} \right]}_{|\Omega|^{p/q}} \\ &\quad \times \left(\int_{\Omega} \int_0^1 \|\nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y})\|_2^p \, dt \, d\mathbf{y} \right) \, d\mathbf{x} \\ &= \frac{cR^p}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \int_0^1 \|\nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y})\|_2^p \, dt \, d\mathbf{y} \right) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Nun werden die Integrationen vertauscht (Satz von Fubini)

$$\int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \leq \frac{cR^p}{|\Omega|} \int_0^1 \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \|\nabla v(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y})\|_2^p \, d\mathbf{y} \right) \, d\mathbf{x} \, dt.$$

Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung in einer Dimension findet man ein $t_0 \in [0, 1]$, so dass

$$\int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \leq \frac{cR^p}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left(\int_{\Omega} \|\nabla v(t_0\mathbf{x} + (1-t_0)\mathbf{y})\|_2^p \, d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}.$$

Wir setzen $\|\nabla v(\mathbf{x})\|_2^p$ auf \mathbb{R}^d durch Null fort und nennen die Fortsetzung ebenfalls $\|\nabla v(\mathbf{x})\|_2^p$. Dann ist

$$\int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \leq \frac{cR^p}{|\Omega|} \int_{\Omega} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla v(t_0\mathbf{x} + (1-t_0)\mathbf{y})\|_2^p \, d\mathbf{y} \right) d\mathbf{x}.$$

Sei $t_0 \in [0, 1/2]$. Da das Integrationsgebiet nun der ganze \mathbb{R}^d ist, ergibt die Variablensubstitution $t_0\mathbf{x} + (1-t_0)\mathbf{y} = \mathbf{z}$

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla v(t_0\mathbf{x} + (1-t_0)\mathbf{y})\|_2^p \, d\mathbf{y} = \frac{1}{1-t_0} \int_{\mathbb{R}^d} \|\nabla v(\mathbf{z})\|_2^p \, d\mathbf{z} \leq 2 \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}^p.$$

Führt man nun noch die äußere Integration über \mathbf{x} aus, so kürzt sich $|\Omega|$ und man erhält insgesamt

$$\int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^p \, d\mathbf{x} \leq 2cR^p \|\nabla v\|_{L^p(\Omega)}^p,$$

da $1/(1-t_0) \leq 2$.

Im Fall $t_0 > 1/2$ vertauscht man die Rollen von \mathbf{x} und \mathbf{y} sowie die Integrationsreihenfolge mit dem Satz von Fubini und argumentiert analog.

Der Fall $p = \infty$ folgt aus (A.1). *Übungsaufgabe* ■

Das Lemma besagt, dass man die $L^p(\Omega)$ -Norm einer niederen Ableitung von v durch dieselbe Norm einer höheren Ordnung abschätzen kann, falls die Integralmittelwerte der niederen Ableitungen verschwinden. Eine wichtige Anwendung dieses Lemmas ist der Beweis des Bramble–Hilbert–Lemmas. Dieses besagt, dass der Wert eines stetigen linearen Funktionals, das auf einem Sobolev–Raum definiert ist und auf einem Polynomraum der Ordnung m verschwindet, durch die Lebesgue–Norm der $m+1$ -ten totalen Ableitung der Funktionen aus dem Sobolev–Raum abgeschätzt werden kann.

Satz A.3 Bramble–Hilbert–Lemma. Seien $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 0$, $p \in [1, \infty]$ und $F : W^{m+1,p}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetiges lineares Funktional und seien die Voraussetzungen der Lemmata A.1 und A.2 erfüllt. Weiter sei

$$F(p) = 0 \quad \forall p \in P_m(\Omega).$$

Dann gibt es eine Konstante $c(\Omega)$, die unabhängig von v und F ist, mit

$$|F(v)| \leq c(\Omega) \|D^{m+1}v\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall v \in W^{m+1,p}(\Omega).$$

Beweis: Sei $v \in W^{m+1,p}(\Omega)$. Wegen Lemma A.1 gibt es ein Polynom aus $P_m(\Omega)$ mit

$$\int_{\Omega} \partial_{\alpha}(v+p)(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0 \quad \text{für } |\alpha| \leq m.$$

Lemma A.2 liefert, mit $l = m+1$, nun die Abschätzung

$$\|v+p\|_{W^{m+1,p}(\Omega)} \leq c(\Omega) \|D^{m+1}(v+p)\|_{L^p(\Omega)} = c(\Omega) \|D^{m+1}v\|_{L^p(\Omega)}.$$

Aus dem Verschwinden von F für $p \in P_m(\Omega)$ und der Stetigkeit von F folgt nun

$$|F(v)| = |F(v+p)| \leq c \|v+p\|_{W^{m+1,p}(\Omega)} \leq c(\Omega) \|D^{m+1}v\|_{L^p(\Omega)}.$$

■

A.2 Interpolationsfehlerabschätzung

Der Interpolationsfehler für affine Familien Finiter-Elemente wird nun mit Hilfe des Bramble–Hilbert–Lemmas abgeschätzt. Die Strategie wird darin bestehen, dass man

- zuerst Abschätzungen auf einer Referenzgitterzelle zeigt,
- dann werden alle Abschätzungen über beliebige Gitterzellen K auf Abschätzungen über die Referenzgitterzelle überführt,
- die dort gezeigten Abschätzungen werden verwendet und
- schließlich wird auf K zurücktransformiert.

Dabei muss man auch untersuchen, was bei den beiden Transformationen geschieht.

Seien $\hat{K} \in \mathbb{R}^d, d \in \{2, 3\}$, eine Referenzgitterzelle (abgeschlossenes und beschränktes Polyeder), $\hat{P}(\hat{K})$ ein Polynomraum der Dimension N und $\hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_N : C^s(\hat{K}) \rightarrow \mathbb{R}$ stetige lineare Funktionale. Es wird vorausgesetzt, dass die Unisolvenzbedingung für den Raum $\hat{P}(\hat{K})$ bezüglich der Funktionale $\hat{\Phi}_1, \dots, \hat{\Phi}_N$ erfüllt ist. Dann gibt es eine lokale Basis $\hat{\phi}_1, \dots, \hat{\phi}_N \in \hat{P}(\hat{K})$.

Für $\hat{v} \in C^s(\hat{K})$ wird die Interpolierende $I_{\hat{K}}\hat{v}$ durch

$$I_{\hat{K}}\hat{v}(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{i=1}^N \hat{\Phi}_i(\hat{v})\hat{\phi}_i(\hat{\mathbf{x}})$$

definiert. Der Operator $I_{\hat{K}}$ ist ein stetiger und linearer Operator von $C^s(\hat{K})$ nach $\hat{P}(\hat{K})$. Aus der Linearität folgt, dass $I_{\hat{K}}$ die Identität auf $\hat{P}(\hat{K})$ ist *Übungsaufgabe*

$$I_{\hat{K}}\hat{p} = \hat{p} \quad \forall \hat{p} \in \hat{P}(\hat{K}).$$

Beispiel A.4 Seien $\hat{K} \subset \mathbb{R}^d$ beliebig, $\hat{P}(\hat{K}) = P_0(\hat{K})$ und

$$\hat{\Phi}(\hat{v}) = \frac{1}{|\hat{K}|} \int_{\hat{K}} \hat{v}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}}.$$

Das Funktional $\hat{\Phi}$ ist stetig auf $C^0(\hat{K})$, da

$$|\hat{\Phi}(\hat{v})| \leq \frac{1}{|\hat{K}|} \int_{\hat{K}} |\hat{v}(\hat{\mathbf{x}})| d\hat{\mathbf{x}} \leq \frac{|\hat{K}|}{|\hat{K}|} \max_{\hat{\mathbf{x}} \in \hat{K}} |\hat{v}(\hat{\mathbf{x}})| = \|\hat{v}\|_{C^0(\hat{K})}.$$

Für die konstante Funktion $1 \in P_0(\hat{K})$ gilt $\hat{\Phi}(1) = 1 \neq 0$. Damit folgt die Unisolvenzbedingung und $\{1\}$ ist die lokale Basis. Der Operator

$$I_{\hat{K}}\hat{v}(\hat{\mathbf{x}}) = \hat{\Phi}(\hat{v})\hat{\phi}(\hat{\mathbf{x}}) = \frac{1}{|\hat{K}|} \int_{\hat{K}} \hat{v}(\hat{\mathbf{x}}) d\hat{\mathbf{x}}$$

ist der Mittelwertoperator, d.h. jede stetige Funktion auf \hat{K} wird durch eine konstante Funktion interpoliert, deren Funktionswert gleich dem Integralmittelwert ist.

Man kann auch $\hat{\Phi}(\hat{v}) = \hat{v}(\hat{\mathbf{x}}_0)$ für einen beliebigen Punkt $\hat{\mathbf{x}}_0 \in \hat{K}$ setzen. Auch dieses Funktional ist linear und stetig auf $C^0(\hat{K})$. Der damit definierte Interpolationsoperator $I_{\hat{K}}$ interpoliert jede stetige Funktion durch eine konstante Funktion, deren Funktionswert gleich dem Funktionswert in $\hat{\mathbf{x}}_0$ ist.

Dieses Beispiel zeigt, dass der Interpolationsoperator $I_{\hat{K}}$ von $\hat{P}(\hat{K})$ und von den gewählten Funktionalen $\hat{\Phi}_i$ abhängt.

Übungsaufgabe, Interpolationen für andere FE □

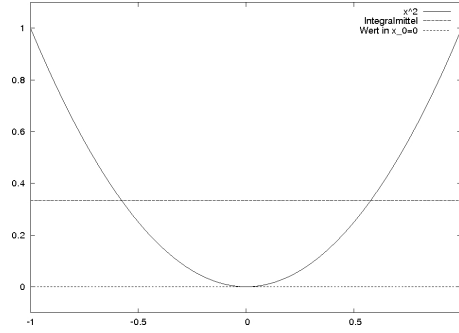


Abbildung A.1: Interpolation von x^2 im Intervall $[-1, 1]$ in den P_0 mit Integralmittelwert und mit den Funktionswert in $x_0 = 0$.

Nun wird die Interpolationsfehlerabschätzung auf der Referenzgitterzelle gezeigt.

Satz A.5 Seien $P_m(\hat{K}) \subset \hat{P}(\hat{K})$ und $p \in [1, \infty]$ mit $(m+1-s)p > d$. Dann gibt es eine von \hat{v} unabhängige Konstante c mit

$$\|\hat{v} - I_{\hat{K}}\hat{v}\|_{W^{m+1,p}(\hat{K})} \leq c \|D^{m+1}\hat{v}\|_{L^p(\hat{K})} \quad \forall \hat{v} \in W^{m+1,p}(\hat{K}).$$

Beweis: Wegen der Sobolev–Ungleichung ist die Einbettung

$$W^{m+1,p}(\hat{K}) \rightarrow C^s(\hat{K})$$

richtig für $(m+1-s)p > d$. Damit ist der Interpolationsoperator auf $W^{m+1,p}(\hat{K})$ wohldefiniert. Aus der Identität des Interpolationsoperators auf $P_m(\hat{K})$, der Beschränktheit des Interpolationsoperators (linear und stetig von $C^s(\hat{K}) \rightarrow \hat{P}(\hat{K}) \subset W^{m+1,p}(\hat{K})$, alle Normen in $P(\hat{K})$ sind äquivalent) und der Sobolev–Ungleichung erhält man für $\hat{q} \in P_m(\hat{K})$

$$\begin{aligned} \|\hat{v} - I_{\hat{K}}\hat{v}\|_{W^{m+1,p}(\hat{K})} &= \|\hat{v} + \hat{q} - I_{\hat{K}}(\hat{v} + \hat{q})\|_{W^{m+1,p}(\hat{K})} \\ &\leq \|\hat{v} + \hat{q}\|_{W^{m+1,p}(\hat{K})} + \|I_{\hat{K}}(\hat{v} + \hat{q})\|_{W^{m+1,p}(\hat{K})} \\ &\leq \|\hat{v} + \hat{q}\|_{W^{m+1,p}(\hat{K})} + c \|\hat{v} + \hat{q}\|_{C^s(\hat{K})} \\ &\leq c \|\hat{v} + \hat{q}\|_{W^{m+1,p}(\hat{K})}. \end{aligned}$$

In Lemma A.1 wird \hat{q} nun so gewählt, dass

$$\int_{\hat{K}} \partial_{\alpha}(\hat{v} + \hat{q}) \, d\hat{\mathbf{x}} = 0 \quad \forall |\alpha| \leq m.$$

Damit sind die Voraussetzungen von Lemma A.2 erfüllt und es gilt

$$\|\hat{v} + \hat{q}\|_{W^{m+1,p}(\hat{K})} \leq c \|D^{m+1}(\hat{v} + \hat{q})\|_{L^p(\hat{K})} = c \|D^{m+1}\hat{v}\|_{L^p(\hat{K})}.$$

■

Bemerkung A.6 Im Satz wird nur verlangt, dass $P_m(\hat{K}) \subset \hat{P}(\hat{K})$. Das schließt nicht aus, dass $\hat{P}(\hat{K})$ auch Polynome höherer Ordnung enthält. Die benötigt man jedoch für die Interpolationsfehlerabschätzung nicht, sofern die im Satz angegebene Sobolev–Einbettung erfüllt ist. □

Um den Interpolationsfehler für beliebige Gitterzellen und schließlich für den Finite–Element–Raum zu untersuchen, müssen wir zuerst Eigenschaften der affinen Abbildung studieren.

Wir betrachten eine affine Familie von Finite–Elementen, deren Gitterzellen von den affinen Abbildungen

$$F_K \hat{\mathbf{x}} = B\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{b}$$

erzeugt werden, wobei B eine reguläre $d \times d$ -Matrix und \mathbf{b} ein d -Vektor ist.

Sei h_K der Durchmesser von $K = F_K(\hat{K})$ (größter Abstand zweier Punkte die zu K gehören). Die Bilder $\{K = F_K(\hat{K})\}$ sollen die folgende Bedingung erfüllen:

- $K \subset \mathbb{R}^d$ ist in einer Kugel vom Radius $c_R h_K$ enthalten,
- K enthält eine Kugel vom Radius $c_R^{-1} h_K$,

wobei die Konstante c_R unabhängig von K ist. Demzufolge gilt für alle K

$$\frac{\text{Umkreis}}{\text{Inkreis}} \leq c_R^2.$$

Eine Triangulierung, die dieser Eigenschaft genügt, wird quasi-uniform genannt. Die Namensgebung ist in der Literatur nicht einheitlich.

Lemma A.7 Für jede Matrixnorm $\|\cdot\|$ gelten die Abschätzungen

$$\|B\| \leq ch_K, \quad \|B^{-1}\| \leq ch_K^{-1},$$

wobei die Konstanten von der Matrixnorm abhängen.

Beweis: Da \hat{K} ein polygonal berandetes Gebiet ist, also insbesondere ein Lipschitz-Gebiet, enthält es eine Kugel $B(\hat{\mathbf{x}}_0, r)$. Daher ist $\hat{\mathbf{x}}_0 + \hat{\mathbf{y}} \in \hat{K}$ für alle $\|\hat{\mathbf{y}}\|_2 = r$. Somit sind die Bilder

$$\mathbf{x}_0 = B\hat{\mathbf{x}}_0 + \mathbf{b}, \quad \mathbf{x} = B(\hat{\mathbf{x}}_0 + \hat{\mathbf{y}}) + \mathbf{b}$$

in K enthalten. Da die Triangulierung quasi-uniform ist, folgt für K

$$\|B\hat{\mathbf{y}}\|_2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|_2 \leq c_R h_K.$$

Für die Spektralnorm gilt

$$\|B\|_2 = \sup_{\hat{\mathbf{z}} \neq \mathbf{0}} \frac{\|B\hat{\mathbf{z}}\|_2}{\|\hat{\mathbf{z}}\|_2} = \frac{1}{r} \sup_{\|\hat{\mathbf{z}}\|_2=r} \|B\hat{\mathbf{z}}\|_2 \leq \frac{2c_R}{r} h_K.$$

Da alle Matrixnormen äquivalent sind, gilt die Abschätzung auch für alle anderen Matrixnormen.

Die Abschätzung für $\|B^{-1}\|$ folgt mit den gleichen Argumenten, wenn man die Rollen von K und \hat{K} vertauscht. ■

Im Beweis sieht man, dass die Konstanten in den Abschätzungen zwar nicht von K , aber von \hat{K} und vor allem von der Konstanten c_R abhängen.

Die Elemente der Matrizen B und B^{-1} werden mit b_{ij} und $b_{ij}^{(-1)}$ bezeichnet. Da $\|B\|_\infty = \max_{i,j} |b_{ij}|$ ebenfalls eine Matrixnorm ist, gilt

$$|b_{ij}| \leq ch_K, \quad |b_{ij}^{(-1)}| \leq ch_K^{-1}.$$

Aus den elementweisen Abschätzungen für die Matrix B erhält man (Leibnizsche Determinantenformel)

$$|\det B| \leq ch_K^d, \quad |\det B^{-1}| \leq ch_K^{-d}.$$

Als nächstes wollen wir sicherstellen, dass der transformierte Interpolationsoperator mit dem natürlichen Interpolationsoperator auf K übereinstimmt. Der letztere ist durch

$$I_K v = \sum_{i=1}^N \Phi_{K,i}(v) \phi_{K,i}$$

definiert, wobei $\{\phi_{K,i}\}$ die Basis des Raums

$$P(K) = \{p : K \rightarrow \mathbb{R} : p = \hat{p} \circ F_K^{-1}, \hat{p} \in \hat{P}(\hat{K})\}$$

ist, die der Beziehung $\Phi_{K,i}(\phi_{K,j}) = \delta_{ij}$ genügt. Die Funktionale waren durch

$$\Phi_{K,i}(v) = \hat{\Phi}_i(v \circ F_K)$$

definiert. Daher folgt aus der Bedingung für die lokale Basis

$$\Phi_{K,i}(\hat{\phi}_j \circ F_K^{-1}) = \hat{\Phi}_i(\hat{\phi}_j) = \delta_{ij},$$

also $\phi_{K,j} = \hat{\phi}_j \circ F_K^{-1}$. Aus

$$\begin{aligned} I_{\hat{K}} \hat{v} &= \sum_{i=1}^N \hat{\Phi}_i(\hat{v}) \hat{\phi}_i = \sum_{i=1}^N \Phi_{K,i}(\underbrace{\hat{v} \circ F_K^{-1}}_{=v}) \phi_i \circ F_K = \left(\sum_{i=1}^N \Phi_{K,i}(v) \phi_{K,i} \right) \circ F_K \\ &= I_K v \circ F_K \end{aligned}$$

folgt, dass $I_{\hat{K}} \hat{v}$ sich richtig transformiert.

Mit der Kettenregel folgt *Übungsaufgabe*

$$\frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_i} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial \hat{v}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}_j} b_j^{(-1)}, \quad \frac{\partial \hat{v}(\hat{\mathbf{x}})}{\partial \hat{\mathbf{x}}_i} = \sum_{j=1}^d \frac{\partial v(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}_j} b_j^i.$$

Daraus ergibt sich (mit jeder Ableitung erhält man einen weiteren Faktor von B bzw. B^{-1})

$$\|D_{\mathbf{x}}^k v(\mathbf{x})\|_2 \leq ch_K^{-k} \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^k \hat{v}(\hat{\mathbf{x}})\|_2, \quad \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^k \hat{v}(\hat{\mathbf{x}})\|_2 \leq ch_K^k \|D_{\mathbf{x}}^k v(\mathbf{x})\|_2.$$

Man erhält

$$\int_K \|D_{\mathbf{x}}^k v(\mathbf{x})\|_2^p d\mathbf{x} \leq ch_K^{-kp} |\det B| \int_{\hat{K}} \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^k \hat{v}(\hat{\mathbf{x}})\|_2^p d\hat{\mathbf{x}} \leq ch_K^{-kp+d} \int_{\hat{K}} \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^k \hat{v}(\hat{\mathbf{x}})\|_2^p d\hat{\mathbf{x}}$$

und

$$\int_{\hat{K}} \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^k \hat{v}(\hat{\mathbf{x}})\|_2^p d\hat{\mathbf{x}} \leq ch_K^{kp} |\det B^{-1}| \int_K \|D_{\mathbf{x}}^k v(\mathbf{x})\|_2^p d\mathbf{x} \leq ch_K^{kp-d} \int_K \|D_{\mathbf{x}}^k v(\mathbf{x})\|_2^p d\mathbf{x}.$$

Aus der Interpolationsfehlerabschätzung auf der Referenzzelle folgt

$$\|D_{\hat{\mathbf{x}}}^k (\hat{v} - I_{\hat{K}} \hat{v})\|_{L^p(\hat{K})}^p \leq c \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^{m+1} \hat{v}\|_{L^p(\hat{K})}^p, \quad 0 \leq k \leq m+1.$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \|D_{\mathbf{x}}^k (v - I_K v)\|_{L^p(K)}^p &\leq ch_K^{-kp+d} \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^k (\hat{v} - I_{\hat{K}} \hat{v})\|_{L^p(\hat{K})}^p \\ &\leq ch_K^{-kp+d} \|D_{\hat{\mathbf{x}}}^{m+1} \hat{v}\|_{L^p(\hat{K})}^p \\ &\leq ch_K^{(m+1-k)p} \|D_{\mathbf{x}}^{m+1} v\|_{L^p(K)}^p. \end{aligned}$$

Damit haben ist die Interpolationsfehlerabschätzung für eine beliebige Gitterzelle gezeigt.

Satz A.8 Sei eine affine Familie Finiter-Elemente durch eine Referenzgitterzelle \hat{K} , Funktionale $\{\hat{\Phi}_i\}$ und einen Polynomraum $\hat{P}(\hat{K})$ gegeben. Weiter seien alle Bedingungen aus dem Satz A.5 erfüllt. Dann gibt es eine Konstante c unabhängig von $v \in W^{m+1,p}(K)$ mit

$$\|D^k (v - I_K v)\|_{L^p(K)} \leq ch_K^{m+1-k} \|D^{m+1} v\|_{L^p(K)}.$$

Man beachte, dass die Potenz von h_K unabhängig von p und d ist.
 Sei eine quasi-uniforme Triangulierung gegeben und definiere

$$h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} \{h_K\}.$$

Dann erhält man durch Summation über die Gitterzellen die Interpolationsfehlerabschätzung für den globalen Finite-Element-Raum:

$$\begin{aligned} \|D^k(v - I_h v)\|_{L^p(\Omega)} &= \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \|D^k(v - I_K v)\|_{L^p(K)}^p \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\sum_{K \in \mathcal{T}_h} ch_K^{(m+1-k)p} \|D^{m+1}v\|_{L^p(K)}^p \right)^{1/p} \\ &\leq ch^{(m+1-k)} \|D^{m+1}v\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

Für lineare Finite-Elemente P_1 ($m = 1$) hat man beispielsweise die Abschätzungen

$$\|v - I_h v\|_{L^p(\Omega)} \leq ch^2 \|D^2 v\|_{L^p(\Omega)}, \quad \|\nabla(v - I_h v)\|_{L^p(\Omega)} \leq ch \|D^2 v\|_{L^p(\Omega)},$$

falls $v \in W^{2,p}(\Omega)$.