Fachbereich Mathematik und Informatik/ Institut für Mathematik
Prof. Dr. Volker John, john@wias-berlin.de
Balázs Kossovics, b.kossovics@fu-berlin.de

Berlin, 22.04.2024

Numerik I

Übungsserie 02

Achtung: Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden. Bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !

1. *Unterschiedliche Bestapproximationen eines Polynoms.* Seien $V = C([-1,1])$, $f(x) = x^4$ und $U = P_3$ der Raum der Polynome dritten Grades in $[-1,1]$. Man berechne die Tschebyscheff-Approximation sowie die Bestapproximation in $L^2(-1,1)$ von f auf U. Von beiden Approximationen ermittle man den Fehler sowohl in der Maximumsnorm als auch in der L^2-Norm. **4 Punkte**

2. *Eigenschaften von Räumen und Basen.* Man löse folgende Aufgaben.

   i) Seien V ein Prä-Hilbert-Raum, U ein endlich-dimensionaler Unterraum von V und $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ eine Basis von U. Des Weiteren seien $f \in V$ und $u \in U$. Man zeige, dass
   $$(f - u, v) = 0 \quad \forall\ v \in U$$
   genau dann erfüllt ist, wenn es für alle Basisfunktionen von U erfüllt ist.

   ii) Sei $\{\varphi_i\}_{i=1}^n$ eine Basis von U. Man zeige, dass die in der Vorlesung definierte Gramsche Matrix
   $$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n, \quad a_{ij} = (\varphi_i, \varphi_j),$$
   symmetrisch und positiv definit ist.

   iii) Man gebe ein Beispiel dafür an, dass $V = C([a,b])$ mit $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_\infty$ kein streng normierter Raum ist.

   4 Punkte

3. Abgabe bis 06.05.2024
   Approximation von Funktionen durch Polygonzüge, Programmieraufgabe. Betrachte die Funktion $f(x) = \sin(x)$ im Intervall $[0, 2\pi]$ und betrache die Bestapproximation in $\|\cdot\|_{L^2}$. Man unterteile das Intervall äquidistant in n Teilintervalle der Schrittweite $h = 2\pi/n$ und verwende zur Approximation den Raum
   $$S_n = \left\{u_n \in C([0,2\pi]) \ : \ u_n|_{[kh,(k+1)h]} \in P_1([kh,(k+1)h]),\ k = 0,\ldots,n-1\right\}.$$

   i) Man bestimme den Fehler
   $$\max_{k=0,\ldots,n} |f(kh) - u_n(kh)| \approx \|f - u_n\|_\infty$$
   für $n = 2^l$, $n = 0, 1, \ldots 128$.

ii) Welche Abhängigkeit des Fehlers von der Schrittweite kann man beobachten?

6 Punkte

Die Übungsaufgaben sollen in Gruppen von zwei Studierenden gelöst werden. Sie sind bis **Montag, 29.04.2024, 10:00** abzugeben, entweder in das Fach des Tutors oder elektronisch in whiteboard.