Fachbereich Mathematik und Informatik/ Institut für Mathematik
Prof. Dr. Volker John, john@wias-berlin.de
Balázs Kossovics, b.kossovics@fu-berlin.de

Berlin, 15.04.2024

Numerik I

Übungsserie 01

Achtung: Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden. Bloße Angabe der Ergebnisse gibt keine Punkte !

1. *Prä-Hilbert-Raum.* Sei X ein normierter Vektorraum.

   a) Man beweise die folgende Aussage. Der Raum X ist genau dann ein reeller Prä-Hilbert-Raum, wenn die sogenannte Parallelogrammidentität

   $$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall\, x, y \in X$$

   gilt.
   Hinweise: Zum Beweis darf die sogenannte Polarisationsformel verwendet werden, das heißt, dass das passende Skalarprodukt durch

   $$4(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2$$

   gegeben ist. Für die Linearität zeige man seperat die Additivität und die Homogenität. Dafür kann es hilfreich sein, zuerst $(x+\delta x, y)+(x-\delta x, y) = 2(x,y)$ zu zeigen. Daraus kann ein Spezialfall für die Homogenität abgeleitet werden, der bis auf die rationalen Zahlen ausgedehnt werden kann. Um die Aussage für die reellen Zahlen zu beweisen, darf die Stetigkeit der Norm ohne Beweis verwendet werden.

   b) Ein Prä-Hilbert-Raum ist strikt konvex, das heißt, es gilt

   $$\frac{1}{4}\|x+y\|^2 < 1 \quad \forall\, x, y \in X \text{ mit } x \neq y, \|x\| = \|y\| = 1.$$

5 Punkte

2. *Tschebyscheff-Polynome 1.Art* Die Tschebyscheff-Polynome 1.Art sind gegeben durch

   $$T_n(x) = \cos\left(n \arccos(x)\right), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

   a) Man berechne die Nullstellen dieser Polynome.

   b) Das Skalarprodukt im Raum $L^2(-1,1)$ ist gegeben durch

   $$(u,v) = \int_{-1}^{1} u(x)v(x)\ dx.$$

   Man zeige, dass die Tschebyscheff-Polynome 1.Art kein Orthogalsystem bezüglich dieses Skalarprodukts bilden.

c) Man zeige, dass die Tschebyscheff-Polynome 1.Art ein Orthogalsystem bezüglich des gewichteten Skalarprodukts

$$(u, v)_w = \int_{-1}^{1} \frac{u(x)v(x)}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$$

bilden.

5 Punkte

Die Übungsaufgaben sollen in Gruppen von zwei Studierenden gelöst werden. Sie sind bis **Montag, 22.04.2024, 10:00** abzugeben, entweder in das Fach des Tutors oder elektronisch.