FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 15.01.2008

Übungsaufgaben zur Vorlesung Mathematik für Informatiker I

Serie 11

abzugeben vor der Vorlesung am Mittwoch, dem 23.01.2008

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Vergessen Sie bitte nicht, dass zur Zulassung zur Prüfung auch das Vorrechnen von Aufgaben in den Übungen gehört !!!

1. Man zeige, daß die durch

$$a_1 := 1, \quad a_{n+1} := \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} a_n, \quad n \in \mathbb{N},$$

gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und ermittle den Grenzwert.

2. Man untersuche die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), \quad x_1 = 2,$$

auf Konvergenz. Man kann folgenden Lösungsweg wählen:

   (a) Man zeige $x_n^2 - 2 \geq 0$.
   (b) Man untersuche $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie.
   (c) Man schließe auf die Existenz eines Grenzwertes und bestimme anschließend dessen Wert.

3. Man bestimme Häufungspunkte, lim inf, lim sup, sup und inf der Folgen:

$$x_n = \frac{1}{2}(-1)^n\left(1+\frac{1}{n}\right), \quad x_n = \left(\frac{(-1)^n - 1}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}} (1 - \frac{1}{n}).$$

4. Gegeben seien zwei Algorithmen A und B, die jeweils ein Problem der Eingangsgröße n in exakt

$$\begin{aligned} f_A(n) &= \sum_{m=1}^{n} \Big((m+n) + 2(m+n)(n-1)\Big), \\ f_B(n) &= \sum_{m=1}^{n} \Big(m(m-1)(n+1) + (n^2-2n+3)(m+2)\Big) \end{aligned}$$

Schritten lösen. Man gebe einfache Funktionen g und h mit $f_A = \mathcal{O}(g)$ und $f_B = \mathcal{O}(h)$ an. Sind die Probleme mit polynomialem Aufwand lösbar?