Lösungen zum 38. Hausblatt für MfI 3

1. Aufgabe:
   a) Für m Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_m$ gilt

$$V(X_1 + \ldots + X_m) = \sum_{i=1}^{m} V(X_i) + \sum_{i \neq j} \mathrm{Cov}(X_i, X_j).$$

$$\begin{aligned}
Var(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) &= E((X_1 + X_2 + \ldots X_n + E(X_1 + X_2 + \ldots + X_n))^2) \\
&= E((X_1 + X_2 + \ldots X_n + EX_1 + EX_2 + \ldots + EX_n)^2) \\
&= E\Big\{\big[(X_1 + EX_1) + (X_2 - EX_2) + \ldots + (X_n - EX_n)\big]^2\Big\} \\
\text{ausmultiplizieren} &= \sum_{i=1,j=1}^{n} E(X_i - EXi)E(X_j - EX_j) \\
&= \sum_{i}^{n} E((X_i - EX_i)^2) + \sum_{\substack{i=1,j=1 \\ i \neq 1}} E(X_i - EX_i)E(X_j - EX_j) \\
&= \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + \sum_{\substack{i=1,j=1 \\ i \neq 1}} Cov(X_i, x_j)
\end{aligned}$$

   b) Sei $Y = aX + b$. Dann gilt für die Momenten–erzeugende Funktion

$$M_Y(\Theta) = e^{b\Theta} M_X(a\Theta).$$

   Lösung:
   Nach Definition ist

$$\begin{aligned}
M_y(\Theta) &= E(e^{\Theta y}) = E(e^{\Theta(aX+b)}) = E(e^{\Theta aX} e^{\Theta b}) \\
&= e^{b\Theta} E(e^{a\theta X}) \quad \text{Linearität} \\
&= e^{b\Theta} M_X(a\Theta) \quad \text{Def Moment erzeugende Funktion}
\end{aligned}$$

2. Aufgabe Man hat es hier mit der n-maligen Wiederholung eines Einzelversuchs mit genau 2 Ausgängen zu tun $\Longrightarrow$
   Die Zufallsprobe z = Anzahl der Treffer, ist binomial verteilt.
   Diesen Sachverhalt kann man sich bei diesen Aufgabe ohne Probleme herleiten, indem man die Anzahl des n-Tupel $(a_1, ..., a_n)$, $a_j \in \{0, 1\}$ betrachtet, die genau i-mal eine 1 und $(n - i)$-mal eine 0 enthalten.
   Die Menge dieses n-Tupel kann als Modell für diese Aufgabe aufgefasst werden:
   1 - Treffer
   0 - kein Treffer
   es gilt

$$z = \sum_{j=1}^{n} a_j, \quad i \leq n$$

   Aus diesem Überlegung folgt, dass für die Wahrscheinlichkeit von i Treffen bei n Schüssen gilt:

$$P(z = i) = \binom{n}{i} p^i (1 - p)^{n-i}$$

Man beachte nun $P(z=i+1)-P(z=i)$ Solange dieser Ausdruck nichtnegativ ist, gibt es eine wahrscheinlichere Anzahl von Treffenr als i. Es ist ein Ausdruck für i(p,n) so zu finden, dass man angeben kann, wann $P(z=i+1) \leq P(z=i)$ gilt.
Es ist

$$\begin{aligned} P(z=i+1)-P(z=i) &= \binom{n}{i+1}p^{i+1}(1-p)^{n-i-1} - \binom{n}{i}p^i(1-p)^{n-i} \\ &= p^i(1-p)^{n-i-1}\left(\frac{n!}{(i+1)!(n-i-1)!}p - \frac{n!}{(i)!(n-i)!}(1-p)\right) \\ &= \frac{n!p^i(1-p)^{n-i-1}}{i!(n-i-1)}\left(\frac{p}{i+1}-\frac{1-p}{n-i}\right) \quad \text{mit} \quad 0 \leq i < n \end{aligned}$$

a) $p=0 \Rightarrow$

$$P(z=i+1)-P(z=i) = \begin{cases} -1 \text{ falls } i=0 \\ 0 \text{ falls } i>0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Einziger Wahrscheinlichkeitswert (und damit grösserer) für z=0, P(0)=1
b) $p=1 \Rightarrow$

$$P(z=i+1)-P(z=i) = \begin{cases} 0 \text{ falls } i<n+1 \\ 1 \text{ falls } i=n+1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Analog a) gilt $P(z=n)=1$ und damit grösserer Wert
c)$0<p<1$
Das Verfahren ist positiv. Man braucht für $sgn(P(z=i+1)-P(z=i))$ nur $sgn(\frac{p}{i+1}-\frac{1-p}{n-i})$ zu untersuchen.

Es sei
$\frac{p}{i+1}-\frac{1-p}{n-i} \geq 0 \Rightarrow \frac{p}{i+1} \geq \frac{1-p}{n-i} \Rightarrow pn-pi \geq i+1-pi-p \Rightarrow pn-1+p \geq i \Rightarrow p(n+1)-1 \geq i$
Das heisst, wenn $p(n+1)-1 \geq i$ gilt, gilt $P(z=i+1) \geq P(z=i)$. Die Folge $(P(z=i))_{i\in\{0,\ldots,n\}}$ ist demnach für $i \leq int(p(n+1)-1))$ monoton wachsend und für $i \geq int(p(n+1)-1)$ monoton fallend. Gilt streng $p(n+1)-1 \neq i$, so ist die wahrscheinlichste Trefferanzahl: $z=int(p(n+1)-1))$.
Gibt es ein i mit $p(n+1)-1=i \Rightarrow P(z=i+1)=P(z=i+1) \Rightarrow$ suche $0<p<1$, dass z= p(n+1)-1 und z=p(n+1) gleichwahrscheinlich sind und wahrscheinlicher als alle anderen Erwartungswerte. $\Rightarrow$ Die diskrete Zufallsgröße hat zwei Maxima (bzgl. der Wahrscheinlichkeit): z=p(n+1)-1 und z=p(n+1)

3. Aufgabe Man benötigt den Parameter für die Poisson–Verteilung. Es ist bekannt, dass der Erwartungswert für diese Verteilung gleich λ ist. Der Erwartungswert für die Anzahl der Fahrzeuge pro Minute ist nach Aufgabenstellung 2.5 , also gilt $\lambda=2.5$
a) $p(0)=\frac{2.5^0}{0!}e^{-2.5} \approx 0.08208$
b) $p(1)=\frac{2.5^1}{1!}e^{-2.5} \approx 0.20521$
c) $p(2)=\frac{2.5^2}{2!}e^{-2.5} \approx 0.25652$
d) $p(A>3)=1-p(0)-p(1)-p(2)-p(3)$
$p(3) \approx 0.25652 \Rightarrow p(A>3) \approx 0.242424$
e) $p(A<6)=p(0)+p(1)+p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)$
$p(4) \approx 0.13360$
$p(5) \approx 0.06680 \qquad \Rightarrow p(A<6) \approx 0.957979)$