Lösungen zum 31. Präsenzblatt für MfI 3

1. Aufgabe :

$$\begin{aligned}
Q^T AQ &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\alpha-\beta & 2\beta+\alpha \\ \alpha-2\beta & \beta+2\alpha \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 2\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2 & \alpha^2-\beta^2 \\ \alpha^2-\beta^2 & 2\alpha^2+2\alpha\beta+2\beta^2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \\
\Longrightarrow \quad \alpha^2-\beta^2 &= 0 \\
\alpha^2 &= \beta^2 \\
\text{mit } \alpha^2+\beta^2 &= 1 \\
\Longrightarrow \quad 2\alpha^2 &= 1 \\
\alpha &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \\
\Longrightarrow \quad \beta &= \frac{1}{2}\sqrt{2} \\
\text{einsetzten liefert } \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. Aufgabe :
Für $(x,y) \neq (0,0)$:

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{3x^2\sqrt{x^2+y^2} - x^3\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2} \\
&= \frac{2x^4+3x^2y^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\
f_y(x,y) &= -\frac{x^3}{2}\,\frac{2y}{2(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}
\end{aligned}
$$

Hintereinanderausführung stetiger Funktionen; keine Division durch Null

$$
\begin{aligned}
\forall (x,y) \neq (0,0) &\implies \forall (x_0,y_0) \in B((x_0,y_0),r), r > 0, \text{ wo } f_x, f_y \text{ stetig} \\
&\implies f \text{ in } (x_0,y_0) \text{ diff'bar}
\end{aligned}
$$

Für $(x,y) = (0,0)$:

$$
f_x = f_y = 0
$$

Überprüfe Stetigkeit: Setze:

$$
\begin{aligned}
x &= r\cos(\varphi) \\
y &= r\sin(\varphi) \\
f_x(r,\varphi) &= \frac{2r^4\cos^4(\varphi) + 3r^4\cos^2(\varphi)\sin^2(\varphi)}{r^3} \\
&= r\left(3\cos^2(\varphi) - \cos^4(\varphi)\right) \\
\lim_{x,y\to 0} f_x(x,y) &= \lim_{r\to 0} f_x(r,\varphi) \\
&= 0 \qquad \longrightarrow \text{ stetig} \\
f_y(r,\varphi) &= \frac{-r^4\cos^3(\varphi)\sin(\varphi)}{r^3} \\
&= -r\cos^3(\varphi)\sin(\varphi) \\
\lim_{x,y\to 0} f_y(x,y) &= \lim_{r\to 0} f_y(r,\varphi) \\
&= 0 \qquad \longrightarrow \text{ stetig} \\
&\implies f \text{ in } (0,0) \text{ diff'bar}
\end{aligned}
$$