Lösungen zum 30. Aufgabenblatt für MfI 3

1. Aufgabe :

$$\begin{aligned}
\|AB\|_2 &= \left(\lambda_{max}\left((AB)^T(AB)\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\lambda_{max}\left(B^TA^TAB\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\lambda_{max}\left(B^TB\right)\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\lambda_{max}(B^TB)\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

$m = 1$:

$$\begin{aligned}
B^TB &= b^Tb \\
&= \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \\
&\Rightarrow \lambda_{max}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \\
&\Rightarrow \left(\lambda_{max}\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \|b\|_2
\end{aligned}$$

2. Aufgabe :

$$\begin{aligned}
A \text{ symmetrisch} &\rightarrow \text{alle Eigenwerte (EW) reell} \\
A \text{ pos. def.} &\rightarrow \text{alle EW positiv}
\end{aligned}$$

Vorbereitungen :

(a) Ist λ ein EW von A, dann ist λ^2 ein EW von A^2.

$Ax = \lambda x \quad \Rightarrow \quad A(Ax) = A(\lambda x) \quad \Rightarrow \quad A^2x = \lambda \underbrace{Ax}_{=\lambda x} \quad \Leftrightarrow \quad A^2x = \lambda^2 x$

(b) Ist λ ein EW von A, so ist λ^{-1} ein EW von A^{-1}.

$Ax = \lambda x \quad \Rightarrow \quad A^{-1}(Ax) = A^{-1}(\lambda x) \quad \Leftrightarrow \quad x = \lambda A^{-1}x \quad \Leftrightarrow \quad A^{-1}x = \lambda^{-1}x$

Lösung der Aufgabe:

$$\kappa_2(A) = \|A\|_2\|A^{-1}\|_2$$

$\|A\|_2 = \left(\lambda_{max}(A^TA)\right)^{\frac{1}{2}} \overset{A^T=A}{=} \left(\lambda_{max}(A^2)\right)^{\frac{1}{2}} \overset{(a)}{=} \left((\lambda_{max}(A))^2\right)^{\frac{1}{2}} = \lambda_{max}(A)$,
da $\lambda_{max}(A) > 0$.

Analog:

$$\|A^{-1}\|_2 = \lambda_{max}(A^1) \overset{(b)}{=} (\lambda_{min}(A))^{-1} \qquad \Longrightarrow \kappa_2(A) = \frac{\lambda_{max}(A)}{\lambda_{min}(A)}$$

3. Aufgabe :
   Es ist

$$\mu = (1-\omega) + \lambda\omega$$

   $\Longrightarrow$ μ_{min} ergibt sich aus λ_{min} und μ_{max} aus λ_{max}
   Ziele:

   (a) $\mu_{\text{min}} > -1$
   (b) $\mu_{\text{max}} < 1$

   (a)

$$\begin{aligned} \mu_{\text{min}} &> -1 \\ (1-\omega) + \lambda_{\text{min}}\omega &> -1 \\ 1 - \omega(1-\lambda_{\text{min}}) &> -1 \\ \omega &< \frac{2}{1-\lambda_{\text{min}}} \\ &< 1, \quad \text{da } \lambda_{\text{min}} < -1 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} \mu_{\text{max}} &< 1 \\ 1 - \omega(1-\lambda_{\text{max}}) &< 1 \\ -\omega &< 0 \\ \omega &> 0 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \quad \omega \in \left(0, \frac{2}{1-\lambda_{\text{min}}}\right)$$