Lösungen zu den 24. Präsenzaufgaben für MfI 2

1. Aufgabe:

(a)

$$\begin{aligned}
A^T &= (3, 1, -2) \\
B^T &= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\
C^T &= (-1, 2)
\end{aligned}$$

Mögliche Verkettungen:

$$\begin{aligned}
A \cdot A^T &= \begin{pmatrix} 9 & 3 & -6 \\ 3 & 1 & -2 \\ -6 & -2 & 4 \end{pmatrix} \\
B \cdot B^T &= \begin{pmatrix} 21 & 10 \\ 10 & 13 \end{pmatrix} \\
C \cdot C^T &= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \\
A^T \cdot A &= 14 \\
B^T \cdot B &= \begin{pmatrix} 4 & 8 & 2 \\ 8 & 25 & -2 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix} \\
C^T \cdot C &= 5 \\
B \cdot A &= \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \end{pmatrix} \\
A^T \cdot B^T &= \begin{pmatrix} 8 & 7 \end{pmatrix} \\
C \cdot A^T &= \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 6 & 2 & -4 \end{pmatrix} \\
C^T \cdot B &= \begin{pmatrix} -2 & 2 & -5 \end{pmatrix} \\
A \cdot C^T &= \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \\
B^T \cdot C &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(b) Die Matrizen A und B sind nichtsingulär. Somit existieren die Umkehrabbildungen zu f und g. Ihre Gleichungen sind

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= A^{-1}\mathbf{x}' \quad \text{oder} \quad f^{-1}(\mathbf{x}) = A^{-1}\mathbf{x}, \\ \mathbf{x} &= B^{-1}\mathbf{x}'' \quad \text{oder} \quad g^{-1}(\mathbf{x}) = B^{-1}\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Wegen

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = A, \qquad B^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B,$$

gilt $f^{-1} = f$ und $g^{-1} = g$. Weiter erhält man für die Abbildungen f^2 bzw. g^2

$$\begin{aligned} f^2(\mathbf{x}) &= (f \circ f)(\mathbf{x}) = f(f(\mathbf{x})) = A(A\mathbf{x}) = \mathbf{x}, \\ g^2(\mathbf{x}) &= (g \circ g)(\mathbf{x}) = g(g(\mathbf{x})) = B(B\mathbf{x}) = \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Sowohl f^2 als auch g^2 ist also die identische Abbildung des $\mathbb{R}^2$.

Anmerkung:
Eine Abbildung, die zweimal hintereinander ausgeführt die Identität ergibt, heißt *involutorisch*.

Desweiteren ergibt sich:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(\mathbf{x}) &= f(g(\mathbf{x})) = A(B\mathbf{x})) = (AB)\mathbf{x}, \\ (g \circ f)(\mathbf{x}) &= g(f(\mathbf{x})) = B(A\mathbf{x})) = (BA)\mathbf{x}, \end{aligned}$$

wobei

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Es gilt also $f \circ g \neq g \circ f$.

2. Aufgabe:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 7 \\ 4 & 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 7 \\ 0 & 10 & 19 & 14 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 & 3 \\ 0 & 6 & 8 & 7 \\ 0 & 0 & 17/3 & 7/3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathrm{Rg}A = 3$$

$$
\begin{aligned}
B &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

$$\Longrightarrow \qquad \mathrm{Rg} B = 2$$