FR 6.1 – Mathematik
Institut für Angewandte Mathematik
Prof. Dr. V. John

Saarbrücken, 08.06.2007

Übungsaufgaben zur Vorlesung
Höhere Mathematik für Ingenieure IV

Serie 05

abzugeben vor der Vorlesung am Dienstag, dem 19.06.2007

Die Programmtexte sind bis zur Vorlesung an den zuständigen Bremser per Email zu schicken; Email–Adressen siehe Homepage zur Lehrveranstaltung.

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Zur Lösung der Aufgaben 3und 4 ist das Programm `spd_matrix.mat` von

`http://www.math.uni-sb.de/ag/john/LEHRE/lehre_2.html`

zu laden. Dieses Programm enthält eine symmetrisch positiv definite Matrix A, die man bei der Diskretisierung einer partiellen Differentialgleichung bekommt, sowie eine rechte Seite b. Sie wird mit folgendem Befehl in ein MATLAB–Programm eingelesen:

```
load 'spd_matrix' A b
```

1. Sei $L \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre untere Dreiecksmatrix. Man programmiere die Vorwärtssubstitution zur Lösung von $Lx = b$ und berechne damit die Lösung für
$$L = \begin{pmatrix} 17 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -4 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 7 & -13 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & -6 & 5 & 3 & 0 \\ 2 & -2 & -10 & 4 & 5 & 9 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ -6 \end{pmatrix}.$$

2. Man betrachte das lineare System $Ax = b$ mit
$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 1+\varepsilon \\ 2 \end{pmatrix}$$
für $\varepsilon = 1e - 15$. Zur Lösung dieses Systems soll ein Programm mit LU-Zerlegung ohne Pivotsuche, Vorwärts- und Rückwärtssubstitution geschrieben werden. Man berechne den absoluten Fehler in der Lösung x. Dazu vergleiche man die Lösung, die MATLAB ($x = A\backslash b$, dieser Befehl nutzt Spaltenpivotsuche) liefert.
Hinweis: Man kann natürlich die LU–Zerlegung mit Hilfe von Schleifen programmieren. Da es sich hier nur um ein 2×2–System handelt, kann man sich aber auch alle Formeln aufschreiben und diese (ohne Schleifen) nacheinander abarbeiten lassen.

3. Man programmiere das Jacobi-Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, wobei A und b mit `spd_matrix.mat` eingelesn werden. Man teste dieses Verfahren für folgende Parameter:

   - Startvektor $x^{(0)} = 0$,
   - Abbruch der Iteration falls $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < 10^{-8}$ oder nach maximal 10000 Iterationen,
   - Dämpfungsparameter $\omega \in \{0.1, 0.3, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1\}$.

   Für alle Dämpfungsparameter überprüfe man, ob das Verfahren konvergiert und in diesen Fällen gebe man die Anzahl der Iterationen an (schriftlich abgeben wird nur anerkannt, wenn auch Programm eingereicht wurde).

4. Man programmiere das SOR-Verfahren zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$, wobei A und b mit `spd_matrix.mat` eingelesen werden. Man teste dieses Verfahren für folgende Parameter:

   - Startvektor $x^{(0)} = 0$,
   - Abbruch der Iteration falls $\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < 10^{-8}$ oder nach maximal 10000 Iterationen,
   - Relaxationsparameter $\omega \in \{0.5, 0.75, 1, 1.25, 1.5, 1.75, 1.9\}$.

   Für alle Relaxationsparameter gebe man die Anzahl der Iterationen an (schriftlich abgeben wird nur anerkannt, wenn auch Programm eingereicht wurde).

Ein Shellskript zum Aufruf von MATLAB im Computerpool, sowie Dokumentationen zu MATLAB sind auf der Homepage, von der man dieses Blatt herunterladen kann, verfügbar.