

Übungsaufgaben zur Vorlesung Höhere Mathematik für Ingenieure IV

Serie 03

abzugeben vor der Vorlesung am Dienstag, dem 22.05.2007

Es werden nur Lösungen bewertet, deren Lösungsweg klar erkennbar ist. Alle Aussagen sind zu begründen. Aus der Vorlesung bekannte Sachverhalte können vorausgesetzt werden.

Die Rechenwege bei der Integration sind ausführlich anzugeben!

1. Mit Hilfe der sukzessiven Integration gebe man Berechnungsformeln für $\int_{\Omega} f(x, y) d\Omega$ an, wenn $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ eines der folgenden Gebiete bezeichnet:
 - (a) Parallelogramm mit Seiten auf den Geraden $x = 3$, $x = 5$, $3x + 4 - 2y = 0$ und $3x - 2y + 1 = 0$,
 - (b) Dreieck mit Seiten auf $x = 0$, $y = 0$ und $x + y = 2$,
 - (c) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \leq 0\}$,
 - (d) $\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2, y \leq 4 - x^2\}$.
2. Man berechne die folgenden Integrale im \mathbb{R}^2 .

(a) $\int_{\Omega} \frac{x^2}{y^2} d\Omega$, Ω werde begrenzt durch $x = 2$, $y = x$ und $xy = 1$,

(b) $\int_{\Omega} \cos(x + y) d\Omega$, Ω werde begrenzt durch $x = 0$, $y = \pi$ und $y = x$.

3. Man berechne das folgende Integral im \mathbb{R}^3

$$\int_{\Omega} xy d\Omega$$

wobei Ω durch $z = xy$, $x + y = 1$, $z \geq 0$ beschrieben wird.

4. Durch Transformation auf Polarkoordinaten berechne man das folgende Doppelintegral:

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqrt{x^2 + y^2} dy dx.$$

5. Unter Ausnutzung eines Integralsatzes ermittle man

$$\int_{\Gamma} \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} ds,$$

für $\mathbf{v} = (x^2, y^2, z^2)^T$. Hierbei ist Γ die Oberfläche des Würfels $\Omega = (0, a)^3$, $a > 0$ und \mathbf{n} ist die Außennormale an die Oberfläche mit Euklidischer Norm 1.